



Geometrische Grundlagen

Dr. Noam I Libeskind

Leibniz-Institut für Astrophysik, Potsdam

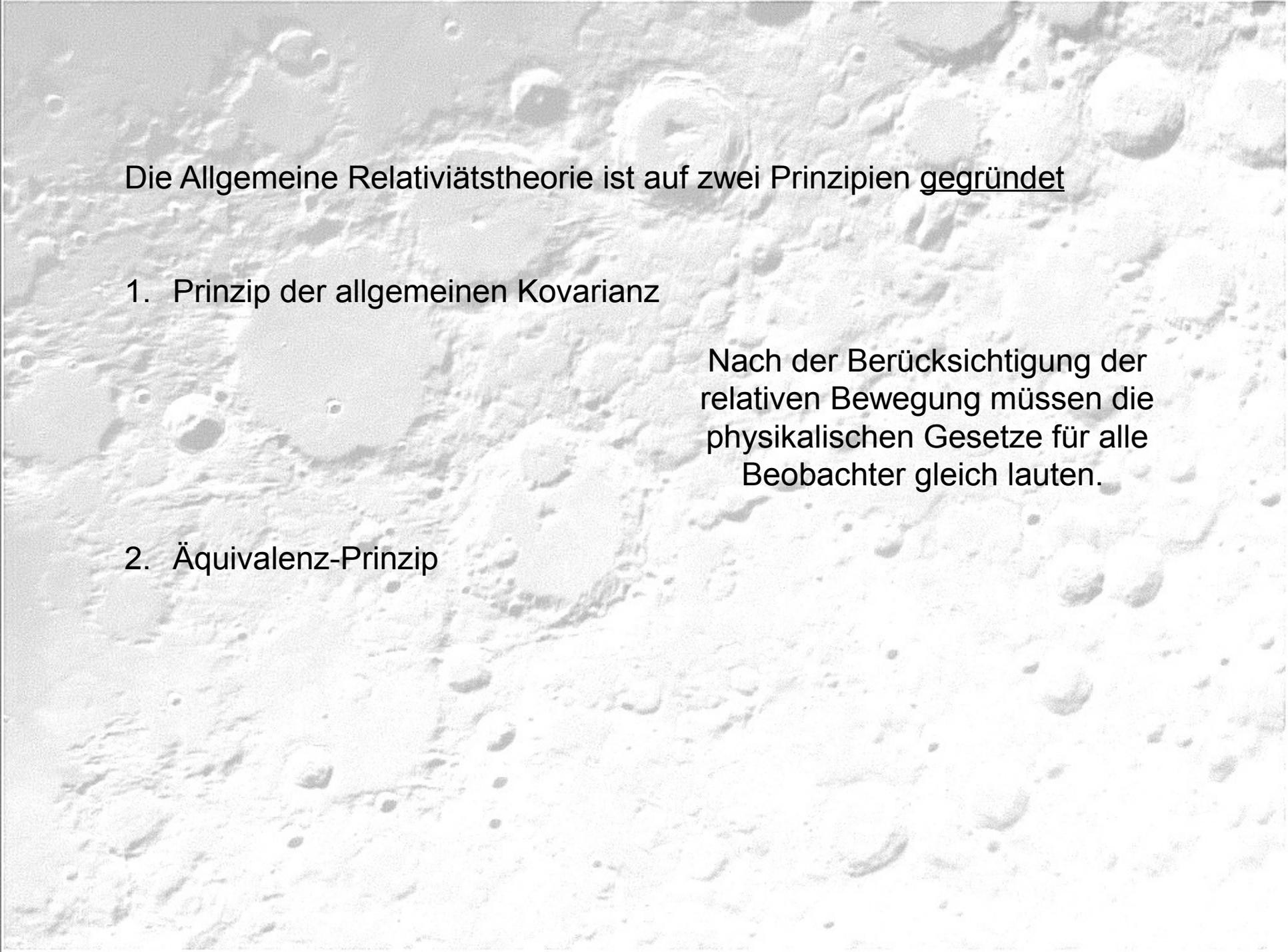
100 Jahre ART: Status und Ausblick
Wilhelm und Else Heraeus Lehrerfortbildung
Potsdam, 11 März 2015



Die Allgemeine Relativitätstheorie ist aus zwei Prinzipien gegründet:

1. Prinzip der allgemeinen Kovarianz

2. Äquivalenz-Prinzip

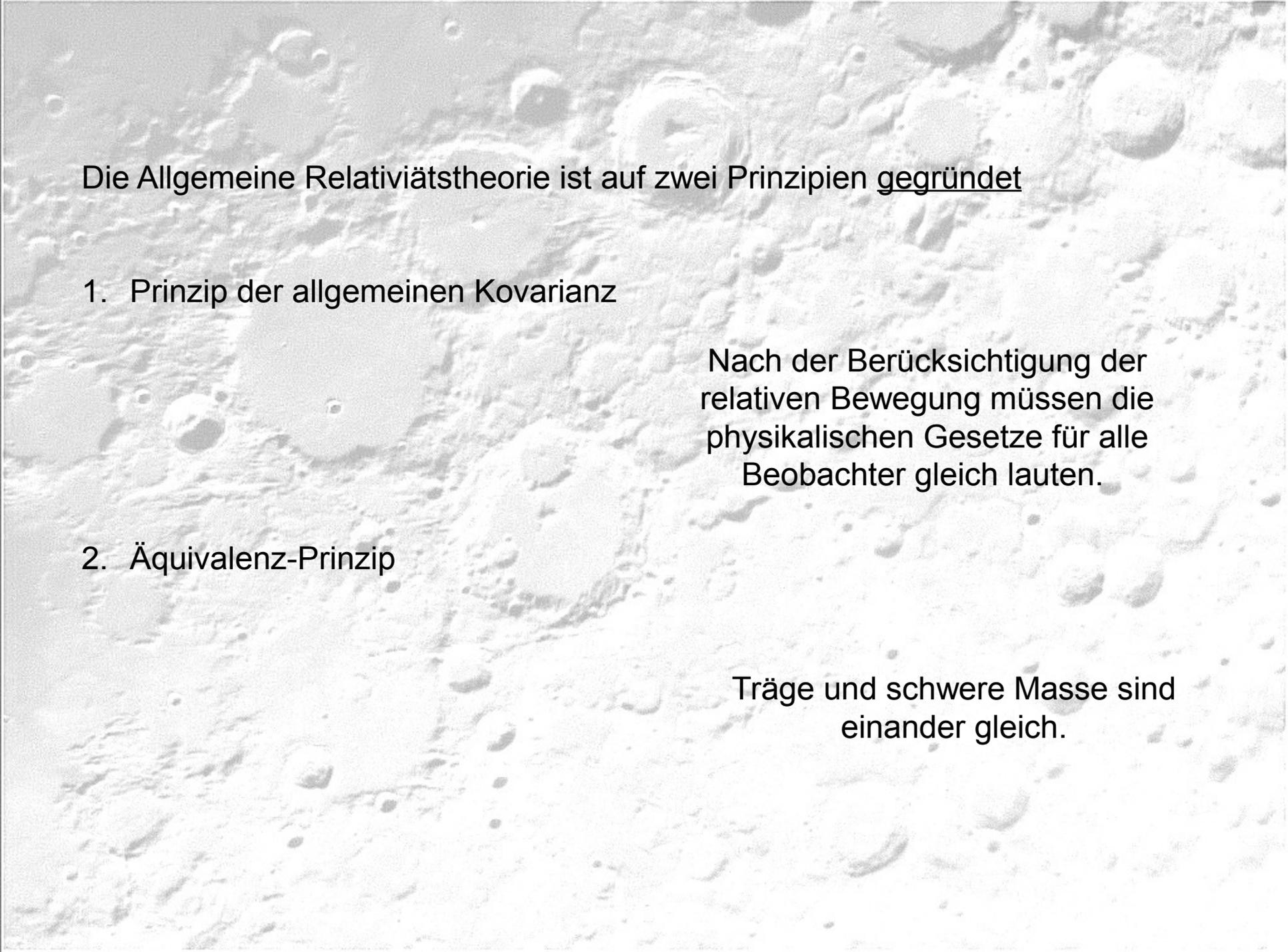


Die Allgemeine Relativitätstheorie ist auf zwei Prinzipien gegründet

1. Prinzip der allgemeinen Kovarianz

Nach der Berücksichtigung der relativen Bewegung müssen die physikalischen Gesetze für alle Beobachter gleich lauten.

2. Äquivalenz-Prinzip



Die Allgemeine Relativitätstheorie ist auf zwei Prinzipien gegründet

1. Prinzip der allgemeinen Kovarianz

Nach der Berücksichtigung der relativen Bewegung müssen die physikalischen Gesetze für alle Beobachter gleich lauten.

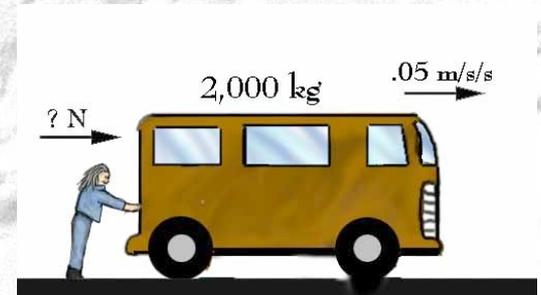
2. Äquivalenz-Prinzip

Träge und schwere Masse sind einander gleich.

Newton hatte zwei Konzepte für die Masse:

1. Eine träge Masse, definiert über Newton's zweites Gesetz

$$mI = F/a$$

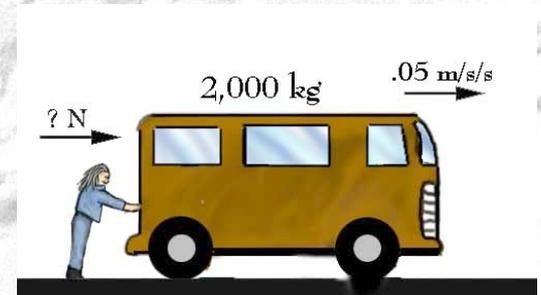


Newton hatte zwei Konzepte für die Masse:

1. Eine träge Masse, definiert über Newton's zweites Gesetz

$$m = F/a$$

Die Masse eines Körpers ist über dessen Widerstand gegen Beschleunigungen definiert.

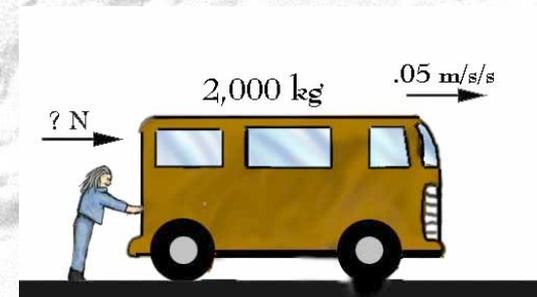


Newton hatte zwei Konzepte für die Masse:

1. Eine träge Masse, definiert über Newton's zweites Gesetz

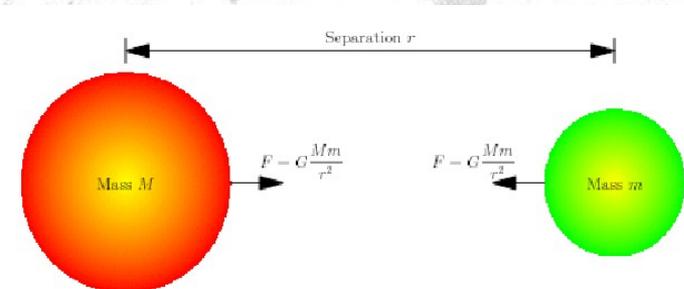
$$mI = F/a$$

Die Masse eines Körpers ist über dessen Widerstand gegen Beschleunigungen definiert.



2. Eine schwere Masse ist definiert über Newton's Gravitationsgesetz

$$mG = r^2 F/GM$$

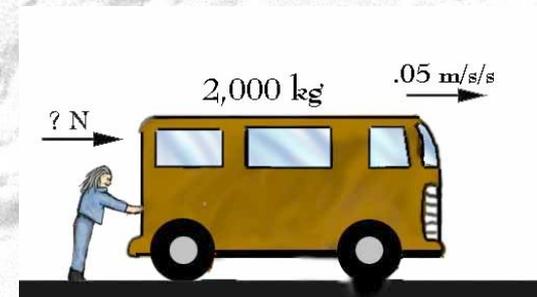


Newton hatte zwei Konzepte für die Masse:

1. Eine träge Masse, definiert über Newton's zweites Gesetz

$$mI = F/a$$

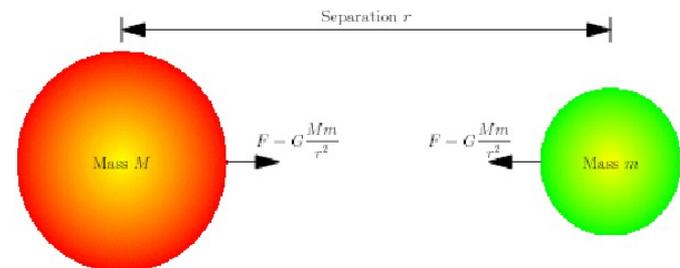
Die Masse eines Körpers ist über dessen Widerstand gegen Beschleunigungen definiert.



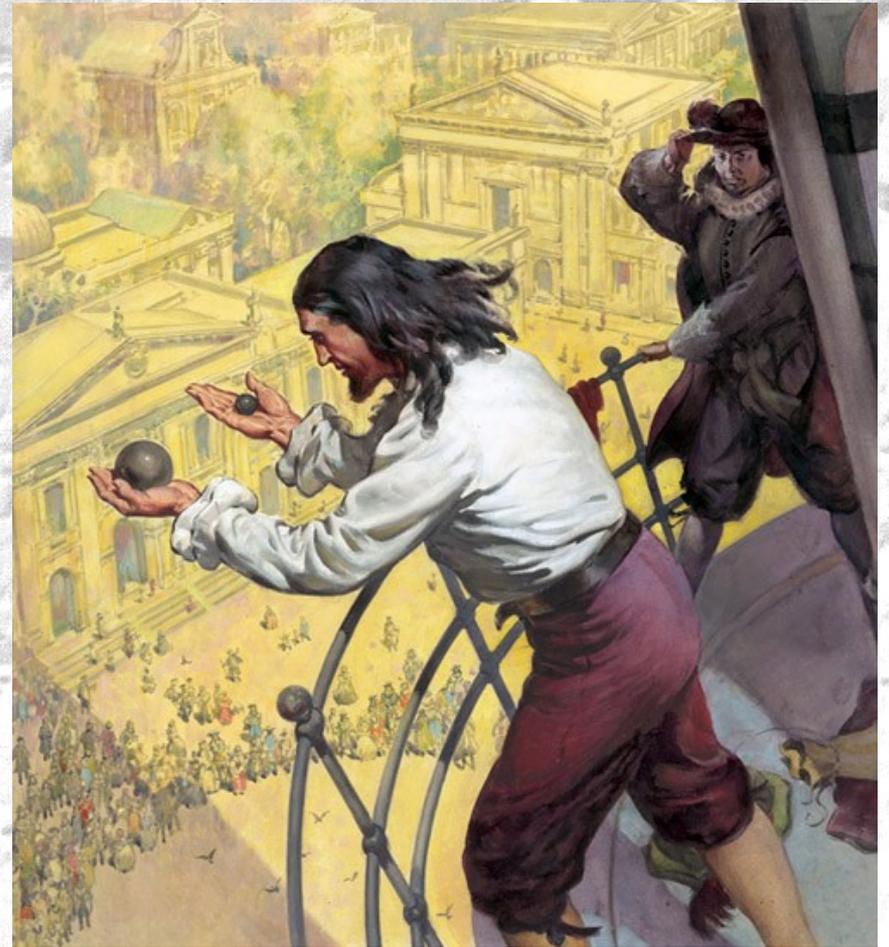
2. Eine schwere Masse ist definiert über Newton's Gravitationsgesetz

$$mG = r^2 F/GM$$

Die Masse eines Körpers ist definiert durch die Stärke der Gravitationsanziehung

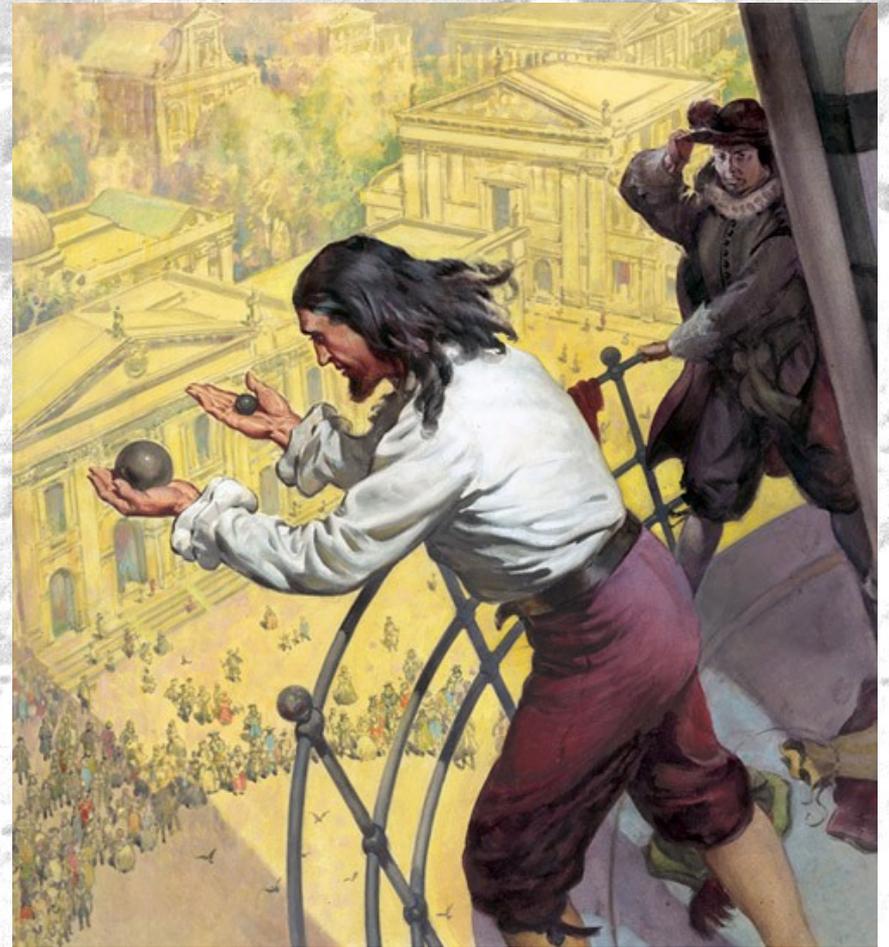


Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.



Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.

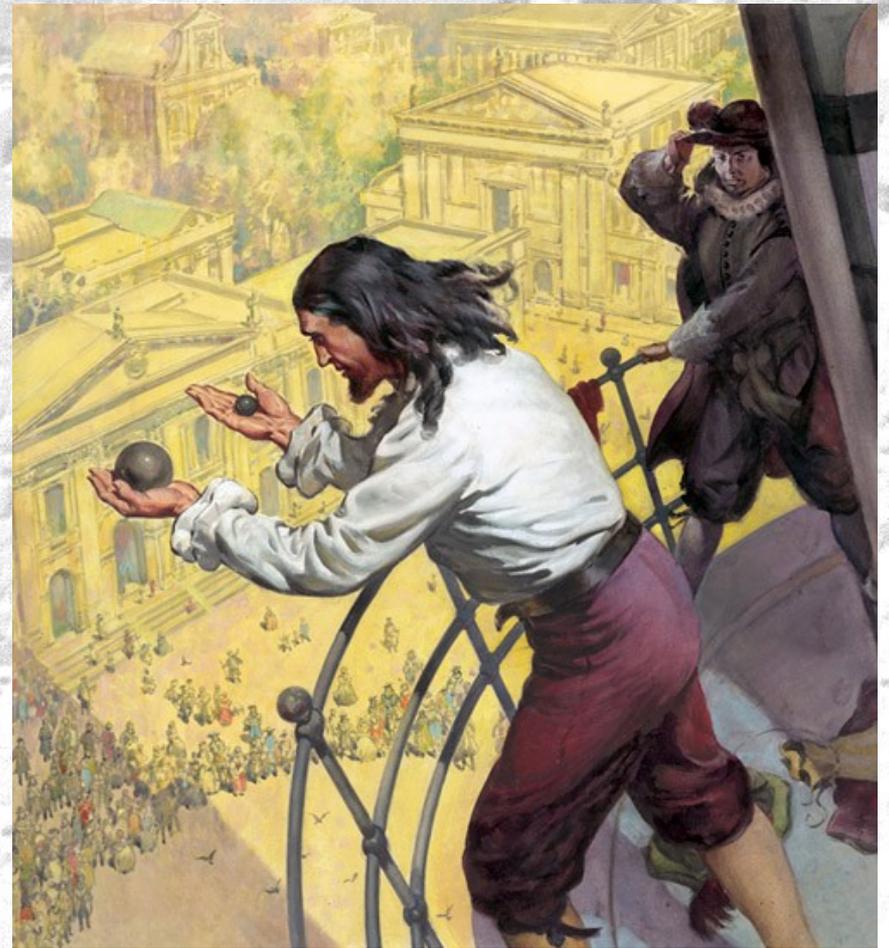
Alle Körper fallen mit der gleichen Rate, unabhängig von ihrer Masse.



Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.

Alle Körper fallen mit der gleichen Rate, unabhängig von ihrer Masse.

Die Kraft, die zur Beschleunigung der trägen Masse benötigt wird, ist exakt gleich zur Schwerkraft.



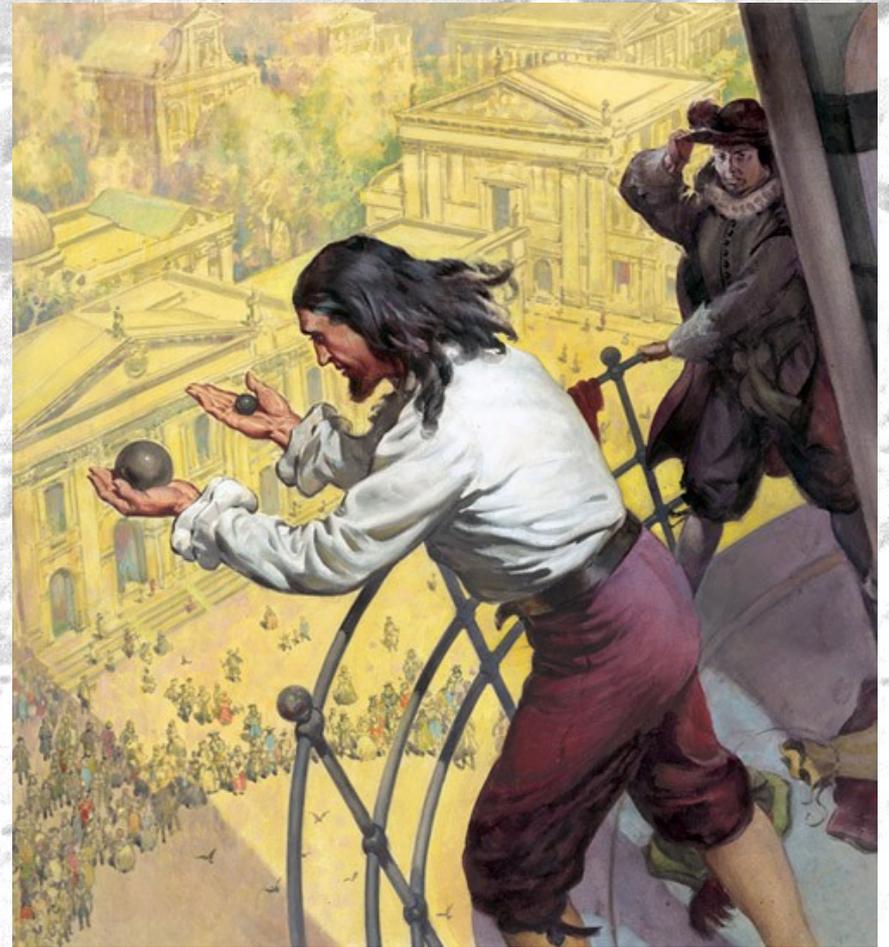
Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.

Alle Körper fallen mit der gleichen Rate, unabhängig von ihrer Masse.

Die Kraft, die zur Beschleunigung der trägen Masse benötigt wird, ist exakt gleich zur Schwerkraft.

In anderen Worten, ein schwererer Körper wird durch die Erde mit größerer Kraft angezogen als ein leichter Körper,

$$g = \frac{F_{\text{big mass}}}{M_{\text{big mass}}} = \frac{f_{\text{small mass}}}{m_{\text{small mass}}}$$



Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.

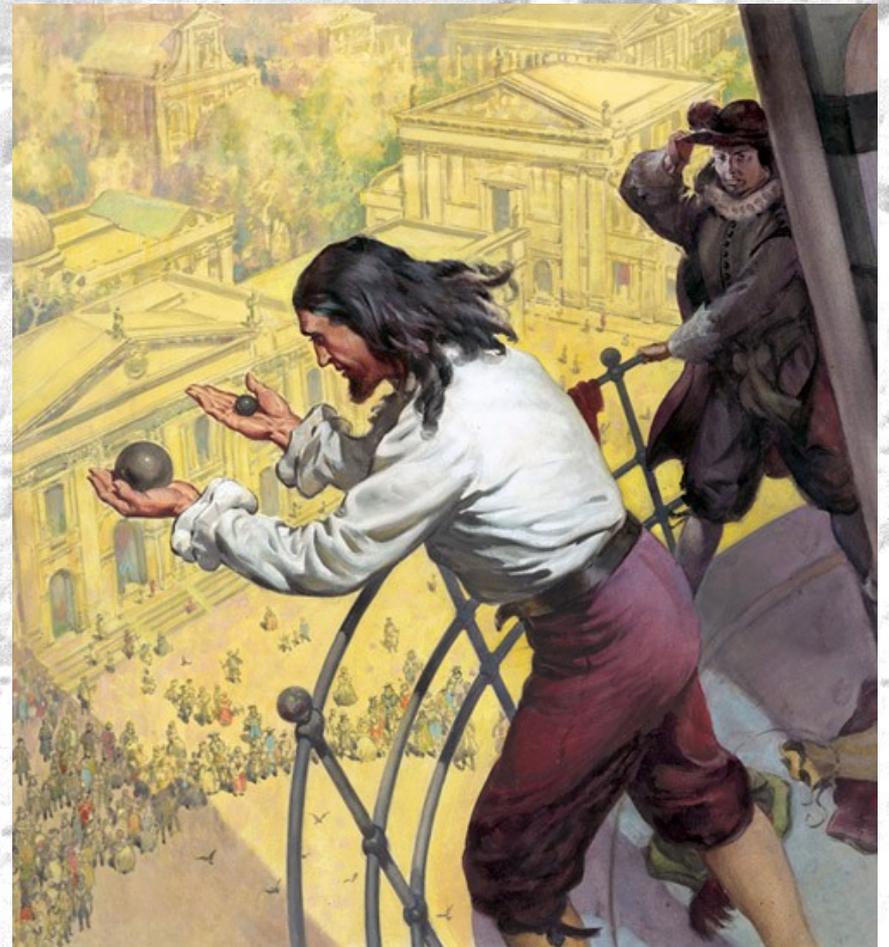
Alle Körper fallen mit der gleichen Rate, unabhängig von ihrer Masse.

Die Kraft, die zur Beschleunigung der trägen Masse benötigt wird, ist exakt gleich zur Schwerkraft.

In anderen Worten, ein schwererer Körper wird durch die Erde mit größerer Kraft angezogen als ein leichter Körper,

$$g = \frac{F_{\text{big mass}}}{M_{\text{big mass}}} = \frac{f_{\text{small mass}}}{m_{\text{small mass}}}$$

Für einen gegebenen Körper bedeutet das:
 $mI = mG$



Galileo bei seinen berühmten Fallversuchen mit Kugeln verschiedener Zusammensetzung und Masse auf der oberen Plattform des schiefen Turms von Pisa.

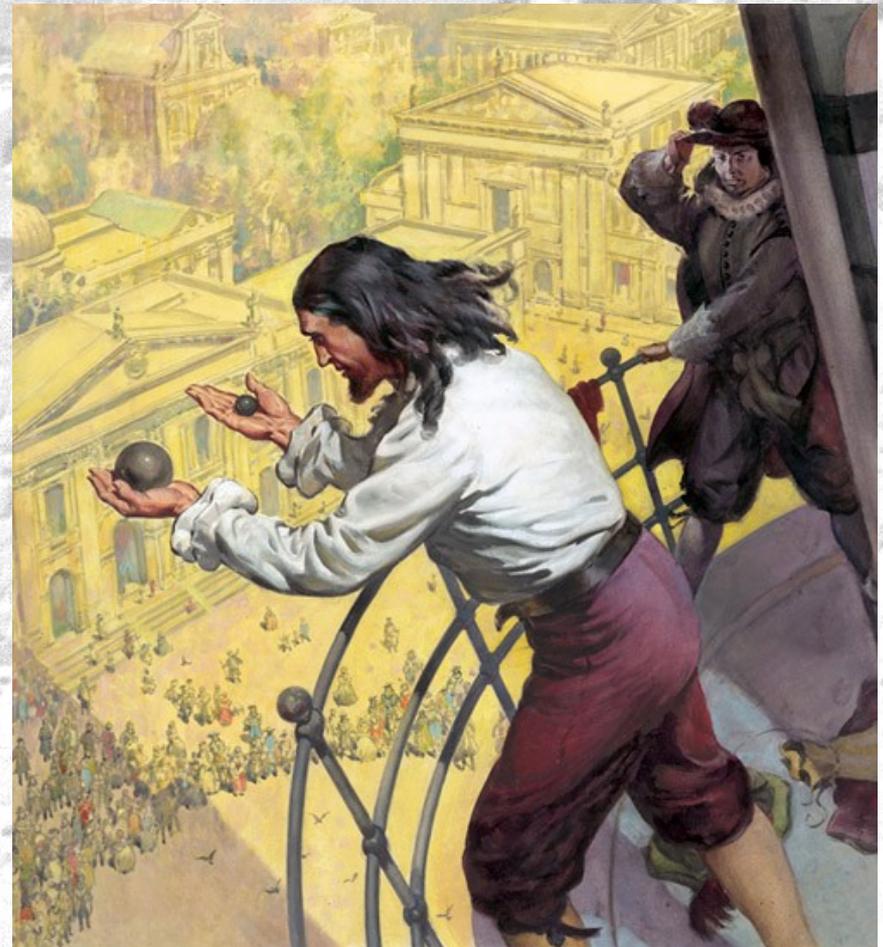
Alle Körper fallen mit der gleichen Rate, unabhängig von ihrer Masse.

Die Kraft, die zur Beschleunigung der trägen Masse benötigt wird, ist exakt gleich zur Schwerkraft.

In anderen Worten, ein schwererer Körper wird durch die Erde mit größerer Kraft angezogen als ein leichter Körper,

$$g = F_{\text{big mass}} / M_{\text{big mass}} = f_{\text{small mass}} / m_{\text{small mass}}$$

Für einen gegebenen Körper bedeutet das $mI = mG$:



Das (schwache) Äquivalenzprinzip:
“Alle Körper erfahren im gleichen Gravitationsfeld die gleiche Beschleunigung unabhängig von ihrer Masse.”



Das (schwache) Äquivalenzprinzip:

“Alle Körper erfahren im gleichen
Gravitationsfeld die gleiche
Beschleunigung unabhängig von ihrer
Masse.”

Was bedeutet das?

Es gilt: Die Schwerkraft auf einem Hammer ist stärker als die auf einer Feder.



Was bedeutet das?

Es gilt: Die Schwerkraft auf einem Hammer ist stärker als die auf einer Feder.

Aber um wie viel? Um genau den gleichen Faktor wie das Verhältnis ihrer Massen.

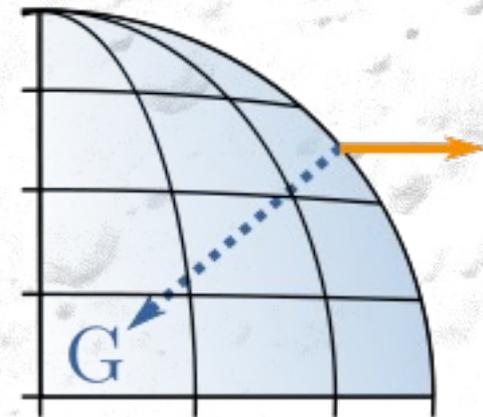
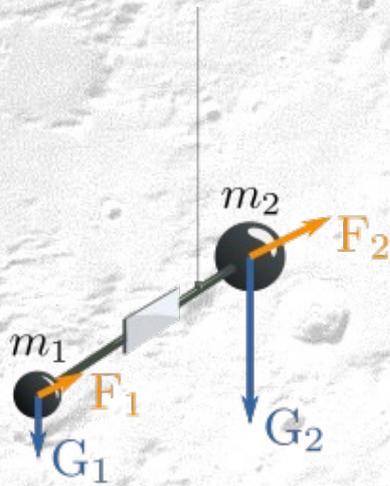


Die Relation $m_I = m_G$ kann in Eötövös' Experiment geprüft werden, das versucht die Differenz von gravitativer und schwerer Masse zu messen.



Die Relation $m_I = m_G$ kann in Eötövös' Experiment geprüft werden, das versucht die Differenz von gravitativer und schwerer Masse zu messen.

Betrachte zwei Massen an einem Stab und aufgehängt an einem Faden.

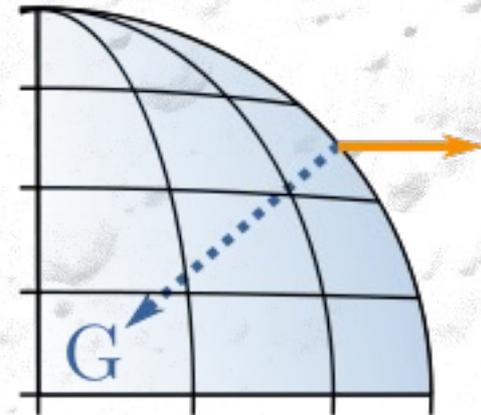
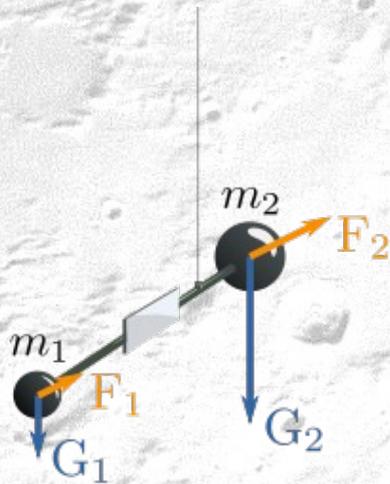


Die Relation $m_I = m_G$ kann in Eötövös' Experiment geprüft werden, das versucht die Differenz von gravitativer und schwerer Masse zu messen.

Betrachte zwei Massen an einem Stab und aufgehängt an einem Faden.

Auf jede Masse wirken zwei Kräfte:

- 1). Die Zentrifugalkraft F durch die Erdrotation wirkt auf die *träge* Masse

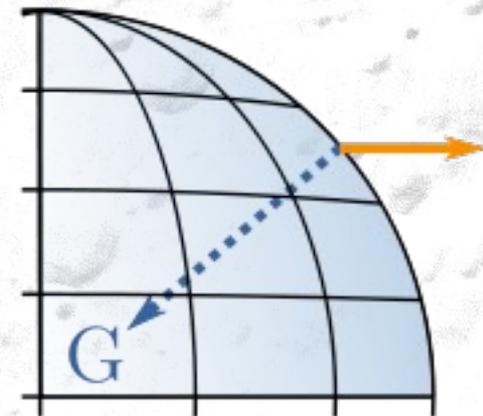
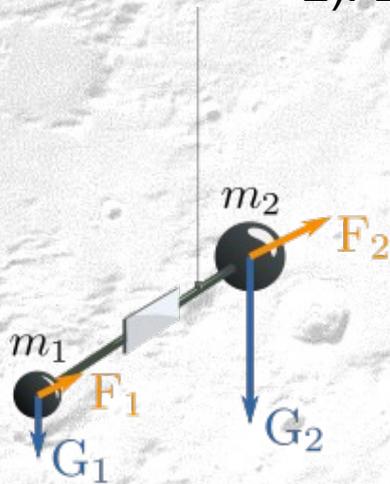


Die Relation $m_I = m_G$ kann in Eötövös' Experiment geprüft werden, das versucht die Differenz von gravitativer und schwerer Masse zu messen.

Betrachte zwei Massen an einem Stab und aufgehängt an einem Faden.

Auf jede Masse wirken zwei Kräfte:

- 1). Die Zentrifugalkraft **F** durch die Erdrotation wirkt auf die *träge* Masse
- 2). Die Gravitationskraft **G** der Erde wirkt auf die *schwere* Masse

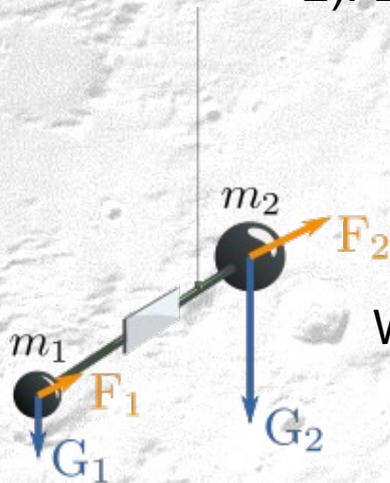


Die Relation $m_I = m_G$ kann in Eötövös' Experiment geprüft werden, das versucht die Differenz von gravitativer und schwerer Masse zu messen.

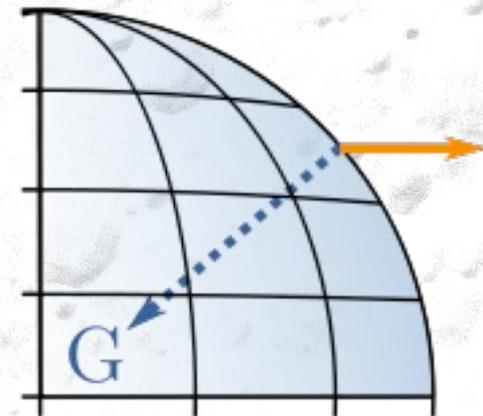
Betrachte zwei Massen an einem Stab und aufgehängt an einem Faden.

Auf jede Masse wirken zwei Kräfte:

- 1). Die Zentrifugalkraft F durch die Erdrotation wirkt auf die *träge* Masse
- 2). Die Gravitationskraft G der Erde wirkt auf die *schwere* Masse



Wenn die Kräfte nicht ausgeglichen sind, wird der Stab anfangen zu rotieren.

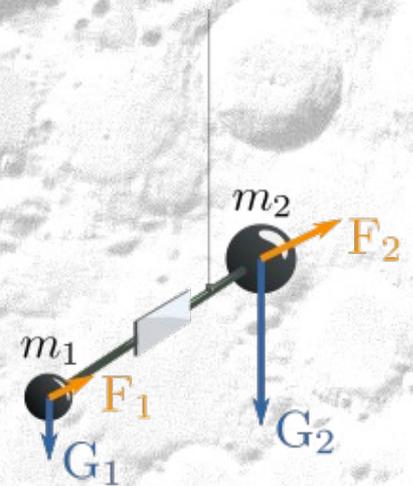


Wiederholungen von Eötövös' Experiment belegen, dass $ml=mG$ mit großer Genauigkeit gilt.

Table V. EQUIVALENCE PRINCIPLE TESTS

Year	Investigator	Accuracy	Method
500?	Philoponus[20]	"small"	Drop Tower
1585	Stevin[19]	$5 \cdot 10^{-2}$	Drop Tower
1590?	Galileo[2]	$2 \cdot 10^{-2}$	Pendulum, Drop Tower
1686	Newton[3]	10^{-3}	Pendulum
1832	Bessel[21]	$2 \cdot 10^{-5}$	Pendulum
1910	Southern[22]	$5 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1918	Zeeman[23]	$3 \cdot 10^{-8}$	Torsion Balance
1922	Eötövös[24]	$5 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1923	Potter[25]	$3 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1935	Renner[26]	$2 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1964	Dicke, Roll, Krotkov[27]	$3 \cdot 10^{-11}$	Torsion Balance
1972	Braginsky, Panov[28]	10^{-12}	Torsion Balance
1976	Shapiro, et al.[29]	10^{-12}	Lunar Laser Ranging
1981	Keiser, Faller[30]	$4 \cdot 10^{-11}$	Fluid Support
1987	Niebauer, et al.[31]	10^{-10}	Drop Tower
1989	Heckel, et al.[32]	10^{-11}	Torsion Balance
1990	Adelberger, et al.[33]	10^{-12}	Torsion Balance
1999	Baeßler, et al.[34]	$5 \cdot 10^{-13}$	Torsion Balance
2010?	MiniSTEP[35]	10^{-17}	Earth Orbit

Ciufolini & Wheeler *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press: Princeton, 1995) pp. 117-119

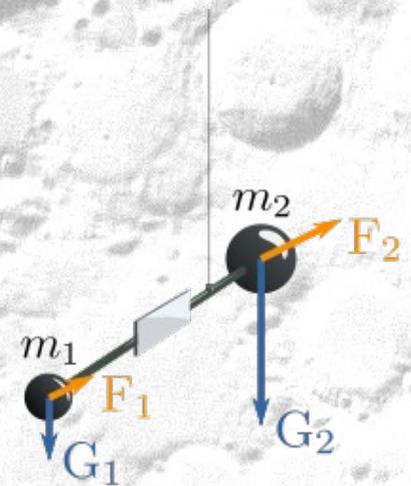


Wiederholungen von Eötövös' Experiment belegen, dass $m_I = m_G$ mit großer Genauigkeit gilt.

Table V. EQUIVALENCE PRINCIPLE TESTS

Year	Investigator	Accuracy	Method
500?	Philoponus[20]	"small"	Drop Tower
1585	Stevin[19]	$5 \cdot 10^{-2}$	Drop Tower
1590?	Galileo[2]	$2 \cdot 10^{-2}$	Pendulum, Drop Tower
1686	Newton[3]	10^{-3}	Pendulum
1832	Bessel[21]	$2 \cdot 10^{-5}$	Pendulum
1910	Southern[22]	$5 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1918	Zeeman[23]	$3 \cdot 10^{-8}$	Torsion Balance
1922	Eötövös[24]	$5 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1923	Potter[25]	$3 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1935	Renner[26]	$2 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1964	Dicke, Roll, Krotkov[27]	$3 \cdot 10^{-11}$	Torsion Balance
1972	Braginsky, Panov[28]	10^{-12}	Torsion Balance
1976	Shapiro, et al.[29]	10^{-12}	Lunar Laser Ranging
1981	Keiser, Faller[30]	$4 \cdot 10^{-11}$	Fluid Support
1987	Niebauer, et al.[31]	10^{-10}	Drop Tower
1989	Heckel, et al.[32]	10^{-11}	Torsion Balance
1990	Adelberger, et al.[33]	10^{-12}	Torsion Balance
1999	Baeßler, et al.[34]	$5 \cdot 10^{-13}$	Torsion Balance
2010?	MiniSTEP[35]	10^{-17}	Earth Orbit

Ciufolini & Wheeler *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press: Princeton, 1995) pp. 117-119



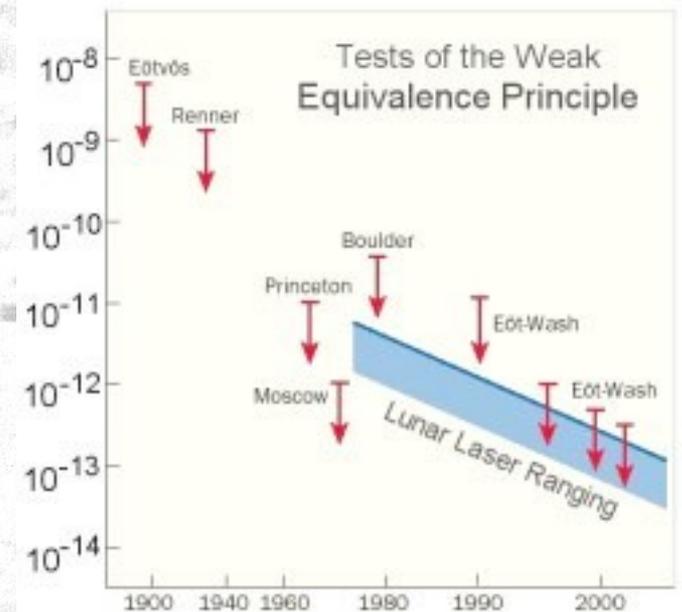
Experimente belegen, dass $m_I = m_G$ mit einer Genauigkeit von eins zu 10¹³ gilt.

Wiederholungen von Eötövös' Experiment belegen, dass $m_I = m_G$ mit großer Genauigkeit gilt.

Table V. EQUIVALENCE PRINCIPLE TESTS

Year	Investigator	Accuracy	Method
500?	Philoponus[20]	"small"	Drop Tower
1585	Stevin[19]	$5 \cdot 10^{-2}$	Drop Tower
1590?	Galileo[2]	$2 \cdot 10^{-2}$	Pendulum, Drop Tower
1686	Newton[3]	10^{-3}	Pendulum
1832	Bessel[21]	$2 \cdot 10^{-5}$	Pendulum
1910	Southerns[22]	$5 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1918	Zeeman[23]	$3 \cdot 10^{-8}$	Torsion Balance
1922	Eötövös[24]	$5 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1923	Potter[25]	$3 \cdot 10^{-6}$	Pendulum
1935	Renner[26]	$2 \cdot 10^{-9}$	Torsion Balance
1964	Dicke,Roll,Krotkov[27]	$3 \cdot 10^{-11}$	Torsion Balance
1972	Braginsky,Panov[28]	10^{-12}	Torsion Balance
1976	Shapiro, et al.[29]	10^{-12}	Lunar Laser Ranging
1981	Keiser,Faller[30]	$4 \cdot 10^{-11}$	Fluid Support
1987	Niebauer, et al.[31]	10^{-10}	Drop Tower
1989	Heckel, et al.[32]	10^{-11}	Torsion Balance
1990	Adelberger, et al.[33]	10^{-12}	Torsion Balance
1999	Baeßler, et al.[34]	$5 \cdot 10^{-13}$	Torsion Balance
2010?	MiniSTEP[35]	10^{-17}	Earth Orbit

Ciufolini & Wheeler *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press: Princeton, 1995) pp. 117-119



Experimente belegen, dass $m_I = m_G$ mit einer Genauigkeit von eins zu 10¹³ gilt.

Äquivalenz-Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”



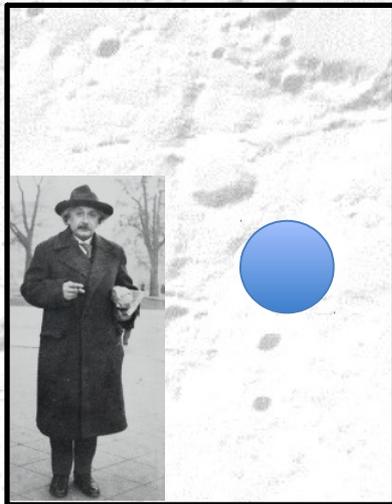
Äquivalenz-Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Mann ist in einer
Kammer auf der
Erde.

Der Mann lässt einen
Ball fallen.

Er fällt mit
 $g=9.81\text{ m/s}^2$



Äquivalenz-Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Mann ist in einer Kammer auf der Erde.

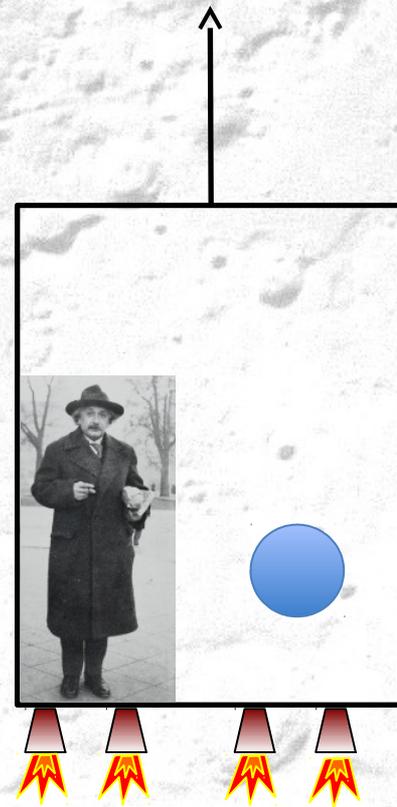
Der Mann lässt einen Ball fallen.

Er fällt mit $g=9.81\text{ m/s}^2$



Ein Mann ist in einer Rakete, die mit 9.81 m/s^2 beschleunigt wird.

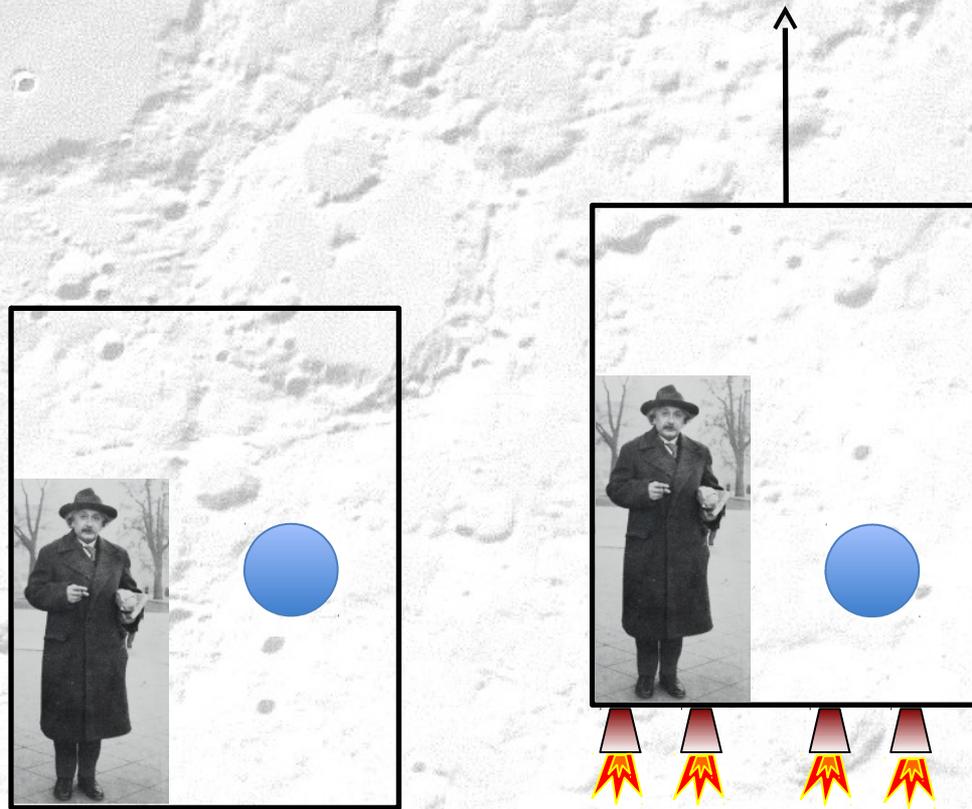
In Bezug auf die Rakete, sieht es so aus, als fällt der Ball mit 9.81 m/s^2 .



Äquivalenz Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Man kann nicht unterscheiden zwischen Schwerkraft und beschleunigter Bewegung.



Äquivalenz-Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Beschleunigtes Bezugssystem und Gravitationsfeld.

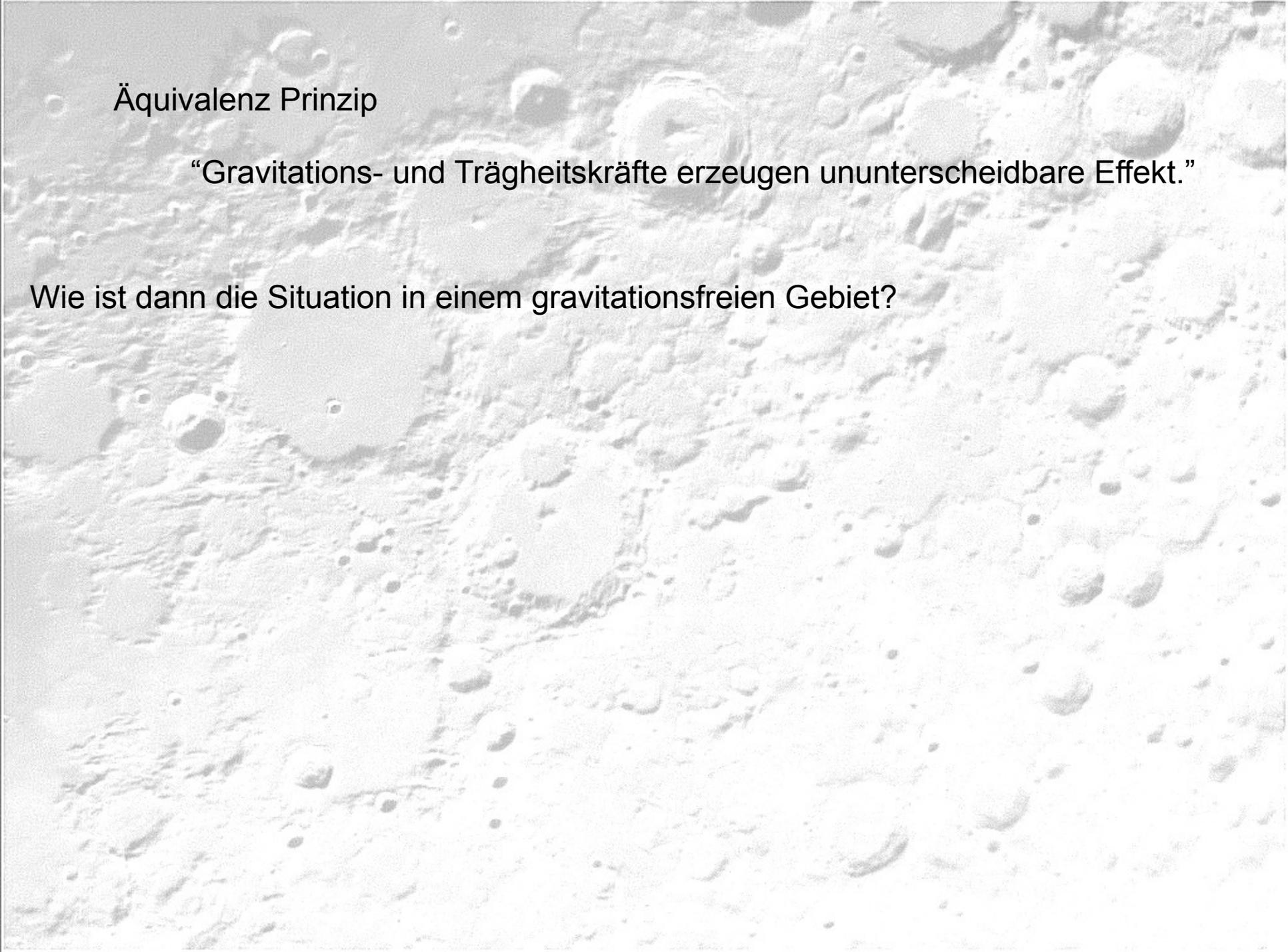
Wir betrachten zwei Bewegungssysteme Σ_1 und Σ_2 . Σ_1 sei in Richtung seiner X -Achse beschleunigt, und es sei γ die (zeitlich konstante) Größe dieser Beschleunigung. Σ_2 sei ruhend; es befinde sich aber in einem homogenen Gravitationsfelde, das allen Gegenständen die Beschleunigung $-\gamma$ in Richtung der X -Achse erteilt.

Soweit wir wissen, unterscheiden sich die physikalischen Gesetze in bezug auf Σ_1 nicht von denjenigen in bezug auf Σ_2 ; es liegt dies daran, daß alle Körper im Gravitationsfelde gleich beschleunigt werden. Wir haben daher bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrung keinen Anlaß zu der Annahme, daß sich die Systeme Σ_1 und Σ_2 in irgendeiner Beziehung voneinander unterscheiden, und wollen daher im folgenden die völlige physikalische Gleichwertigkeit von Gravitationsfeld und entsprechender Beschleunigung des Bezugssystems annehmen.

Äquivalenz Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Wie ist dann die Situation in einem gravitationsfreien Gebiet?



Äquivalenz Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Wie ist dann die Situation in einem gravitationsfreien Gebiet?

Beschleunigung
nach unten

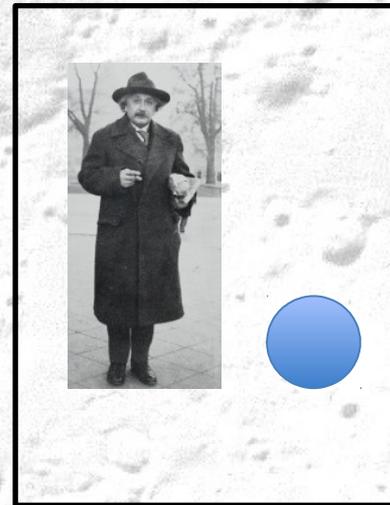


Äquivalenz Prinzip

“Gravitations- und Trägheitskräfte erzeugen ununterscheidbare Effekt.”

Wie ist dann die Situation in einem gravitationsfreien Gebiet?

Beschleunigung
nach unten



Mitschwimmen im
tiefen Raum

Das führte Einstein zum Konzept “Ein fallender Mensch bemerkt keine Gravitationskraft”



Das führte Einstein zum Konzept “Ein fallender Mensch bemerkt keine Gravitationskraft”

Ich sass auf meinem Sessel im Berner Patentamt, als mir plötzlich folgender Gedanke kam: Wenn sich eine Person im freien Fall befindet, dann spürt sie ihr eigenes Gewicht nicht. Ich war verblüfft. Dieser einfache Gedanke machte auf mich einen tiefen Eindruck. Er trieb mich in Richtung einer Theorie der Gravitation

A Einstein, Kyoto (1922)



Das führte Einstein zum Konzept “Ein fallender Mensch bemerkt keine Gravitationskraft”

Ich sass auf meinem Sessel im Berner Patentamt, als mir plötzlich folgender Gedanke kam: Wenn sich eine Person im freien Fall befindet, dann spürt sie ihr eigenes Gewicht nicht. Ich war verblüfft. Dieser einfache Gedanke machte auf mich einen tiefen Eindruck. Er trieb mich in Richtung einer Theorie der Gravitation

A Einstein, Kyoto (1922)

Es gibt keine Möglichkeit zu unterscheiden, ob man in einem freien Fall in einer Bahn um einen Planeten befindet, oder im tiefen kosmischen Raum, wo es keine Gravitation gibt.



Das führte Einstein zum Konzept “Ein fallender Mensch bemerkt keine Gravitationskraft”

Ich sass auf meinem Sessel im Berner Patentamt, als mir plötzlich folgender Gedanke kam: Wenn sich eine Person im freien Fall befindet, dann spürt sie ihr eigenes Gewicht nicht. Ich war verblüfft. Dieser einfache Gedanke machte auf mich einen tiefen Eindruck. Er trieb mich in Richtung einer Theorie der Gravitation

A Einstein, Kyoto (1922)

Es gibt keine Möglichkeit zu unterscheiden, ob man in einem freien Fall in einer Bahn um einen Planeten befindet, oder im tiefen kosmischen Raum, wo es keine Gravitation gibt.

Für einen Beobachter im freien Fall in einem Gravitationsfeld gibt es kein Experiment, mit dem er die Stärke des Gravitationsfeldes messen könnte, es kann Null sein, oder das Erdfeld.



Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.



Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Wir betrachten einen Laser, der weit entfernt von kosmischen Massen einen Lichtstrahl gerade auf eine Wand schickt.



Laser

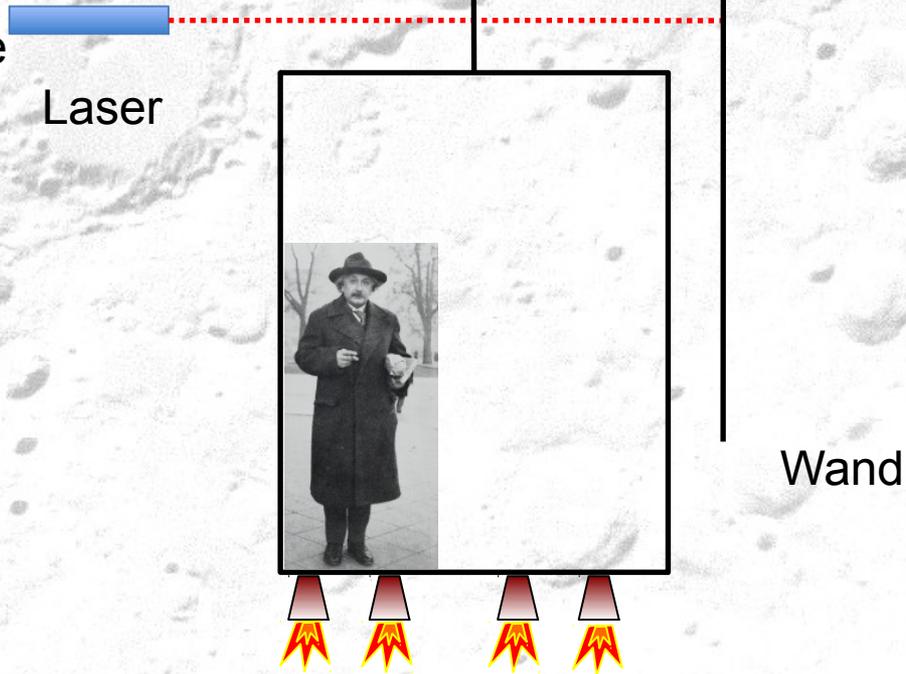


Wand

Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Wir betrachten einen Laser, der weit entfernt von kosmischen Massen einen Lichtstrahl gerade auf eine Wand schickt.

Nehme nun an, eine Rakete fliegt senkrecht durch den Laserstrahl.

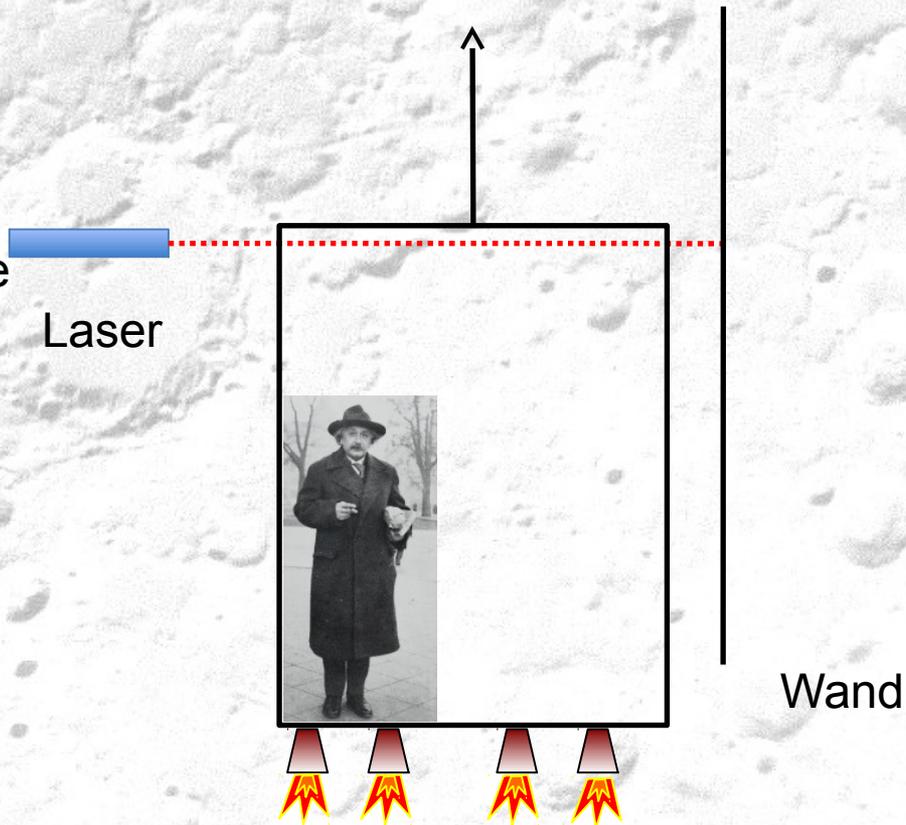


Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Wir betrachten einen Laser, der weit entfernt von kosmischen Massen einen Lichtstrahl gerade auf eine Wand schickt.

Nehme nun an, eine Rakete fliegt senkrecht durch den Laserstrahl.

Zur Zeit t_0 tritt der Strahl in die Rakete ein.



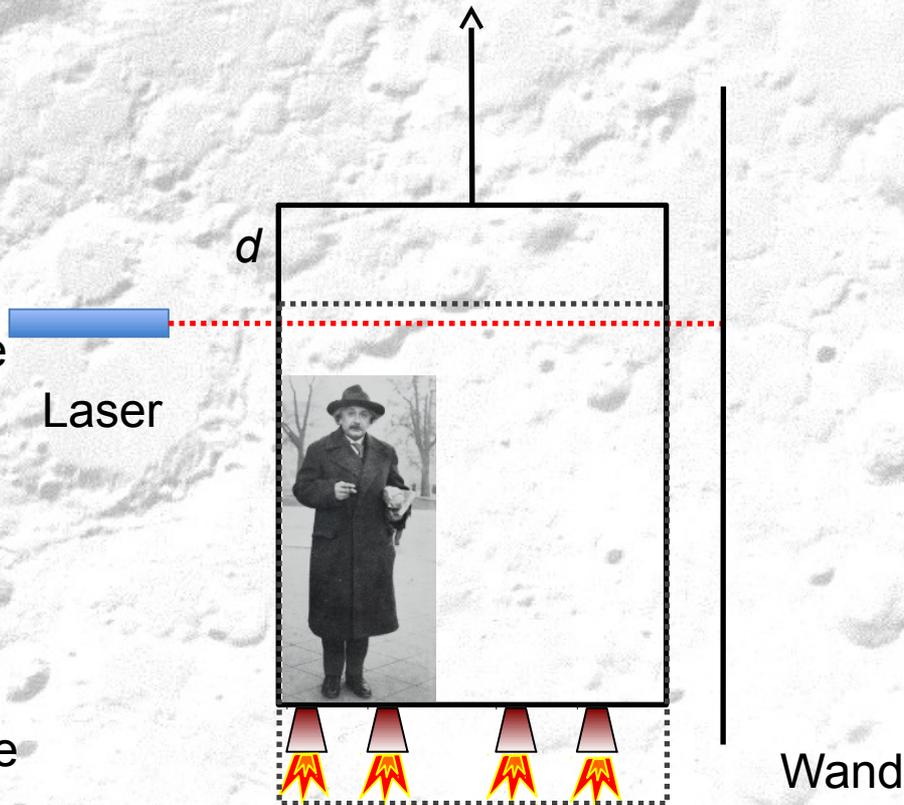
Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Wir betrachten einen Laser, der weit entfernt von kosmischen Massen einen Lichtstrahl gerade auf eine Wand schickt.

Nehme nun an, eine Rakete fliegt senkrecht durch den Laserstrahl.

Zur Zeit t_0 tritt der Strahl in die Rakete ein

Bis t_1 ist die Rakete um eine kleine Distanz d beschleunigt aufgestiegen



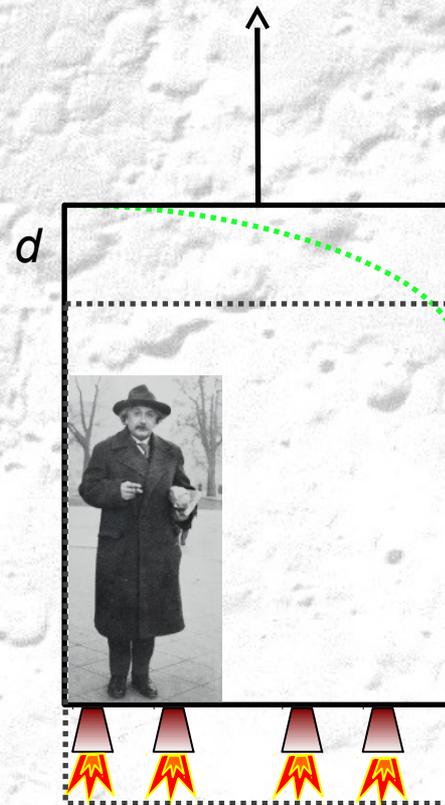
Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Wir betrachten einen Laser, der weit entfernt von kosmischen Massen einen Lichtstrahl gerade auf eine Wand schickt.

Nehmen wir nun an, eine Rakete fliegt senkrecht durch den Laserstrahl.

Zur Zeit t_0 tritt der Strahl in die Rakete ein.

Bis t_1 ist die Rakete um eine kleine Distanz d beschleunigt aufgestiegen.

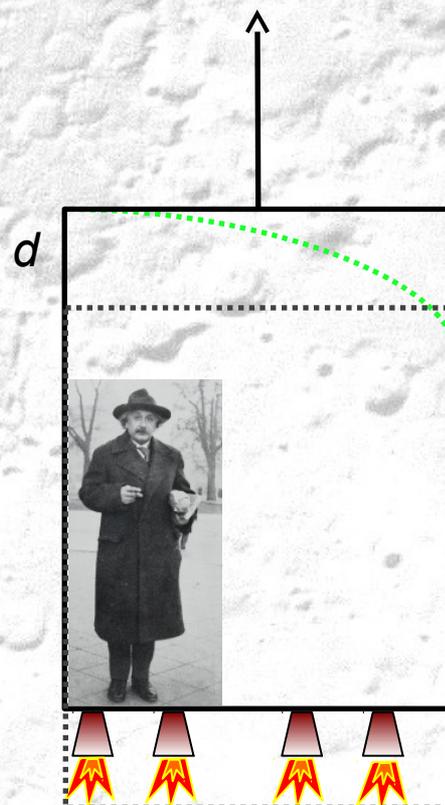
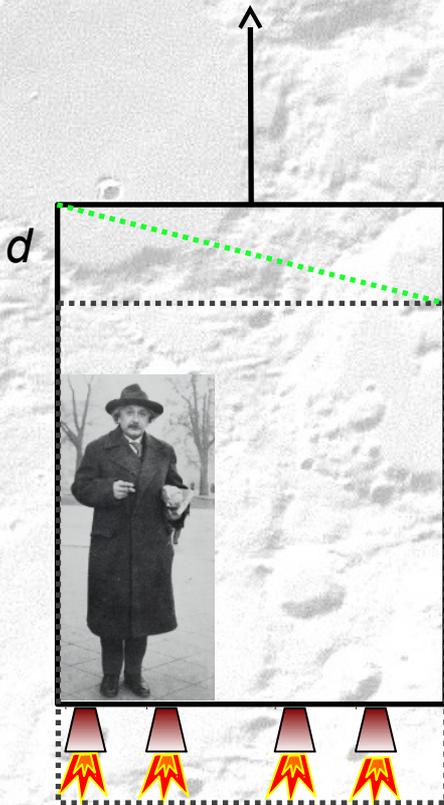


Aus der Perspektive der Rakete ist der Lichtstrahl gebogen.

Die Ablenkung des Lichtstrahls passiert wegen der beschleunigten Bewegung der Rakete.

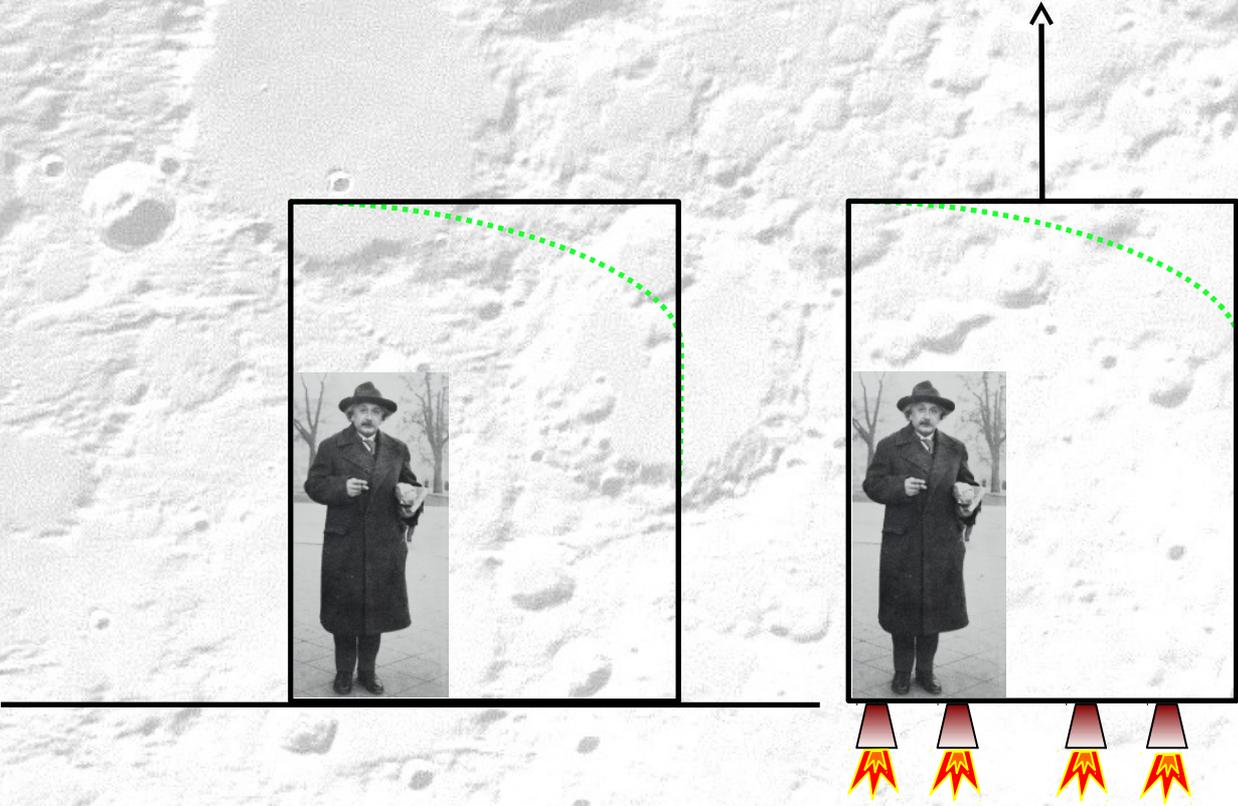
Das Äquivalenzprinzip führt direkt zum Konzept, dass die Schwerkraft wiedergegeben oder verstanden werden kann als Krümmung der Raum-Zeit.

Beachte: Wäre die Rakete mit konstanter (nicht beschleunigter) Bewegung aufgestiegen, ware der Lichtstrahl eine Gerade.

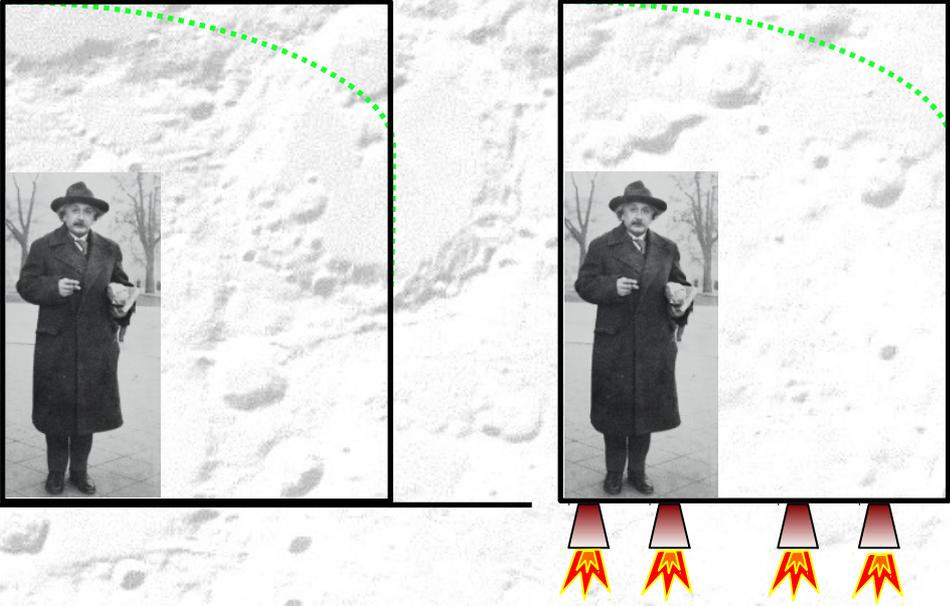


Die Beschleunigung lenkt den Lichtstrahl ab.

Das Äquivalenzprinzip besagt jedoch, dass wir keine Differenz zwischen der beschleunigt bewegten Rakete und dem Gravitationsfeld feststellen können.



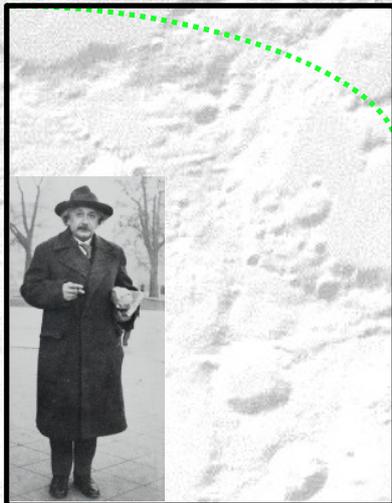
Das Äquivalenzprinzip besagt jedoch, dass wir keine Differenz zwischen der beschleunigt bewegten Rakete und dem Gravitationsfeld unterscheiden können.



Licht ist abgelenkt im beschleunigten Bezugssystem

Das Äquivalenzprinzip besagt jedoch, dass wir keine Differenz zwischen der beschleunigt bewegten Rakete und dem Gravitationsfeld feststellen können.

Licht ist abgelenkt
in Gravitationsfeld



Licht ist abgelenkt
im beschleunigten
Bezugssystem

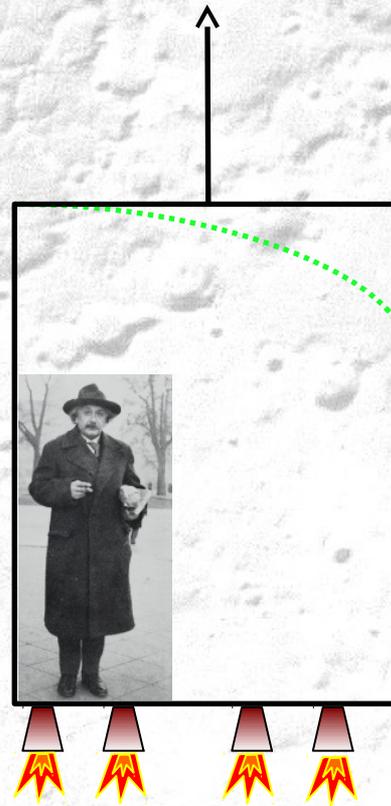


Das Äquivalenzprinzip besagt jedoch, dass wir keine Differenz zwischen der beschleunigt bewegten Rakete und dem Gravitationsfeld feststellen können.

Licht ist abgelenkt
in Gravitationsfeld



Licht ist abgelenkt
im beschleunigten
Bezugssystem



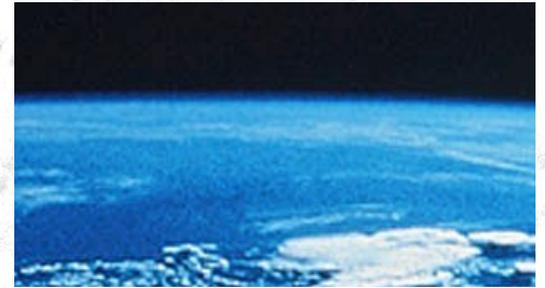
Wenn Licht im stationären Fall auf der Erde nicht abgelenkt würde, wäre das Äquivalenzprinzip verletzt, wir wären fähig, die beiden Fälle zu unterscheiden.

Das Äquivalenzprinzip besagt jedoch, dass wir keine Differenz zwischen der beschleunigt bewegten Rakete und dem Gravitationsfeld feststellen können.



Unterschiedliche Formulierungen des :

1. Wenn man sich in einem freien Fall befindest, bemerkt man kein Gravitationsfeld, Lichtstrahlen sind gerade Linien. Dies nennt man "lokale Inertialsysteme".



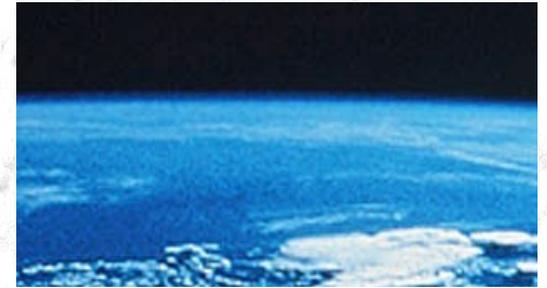
Unterschiedliche Formulierungen des :

1. Wenn man sich in einem freien Fall befindest, bemerkt man kein Gravitationsfeld, Lichtstrahlen sind gerade Linien. Dies nennt man "lokale Inertialsysteme".
2. In einem lokalen Inertialsystem ist die Raum-Zeit flach, es gilt die Spezielle Relativitätstheorie mit den Lorentz-Transformationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Es handelt sich um die Minkowski-Raum-Zeit.



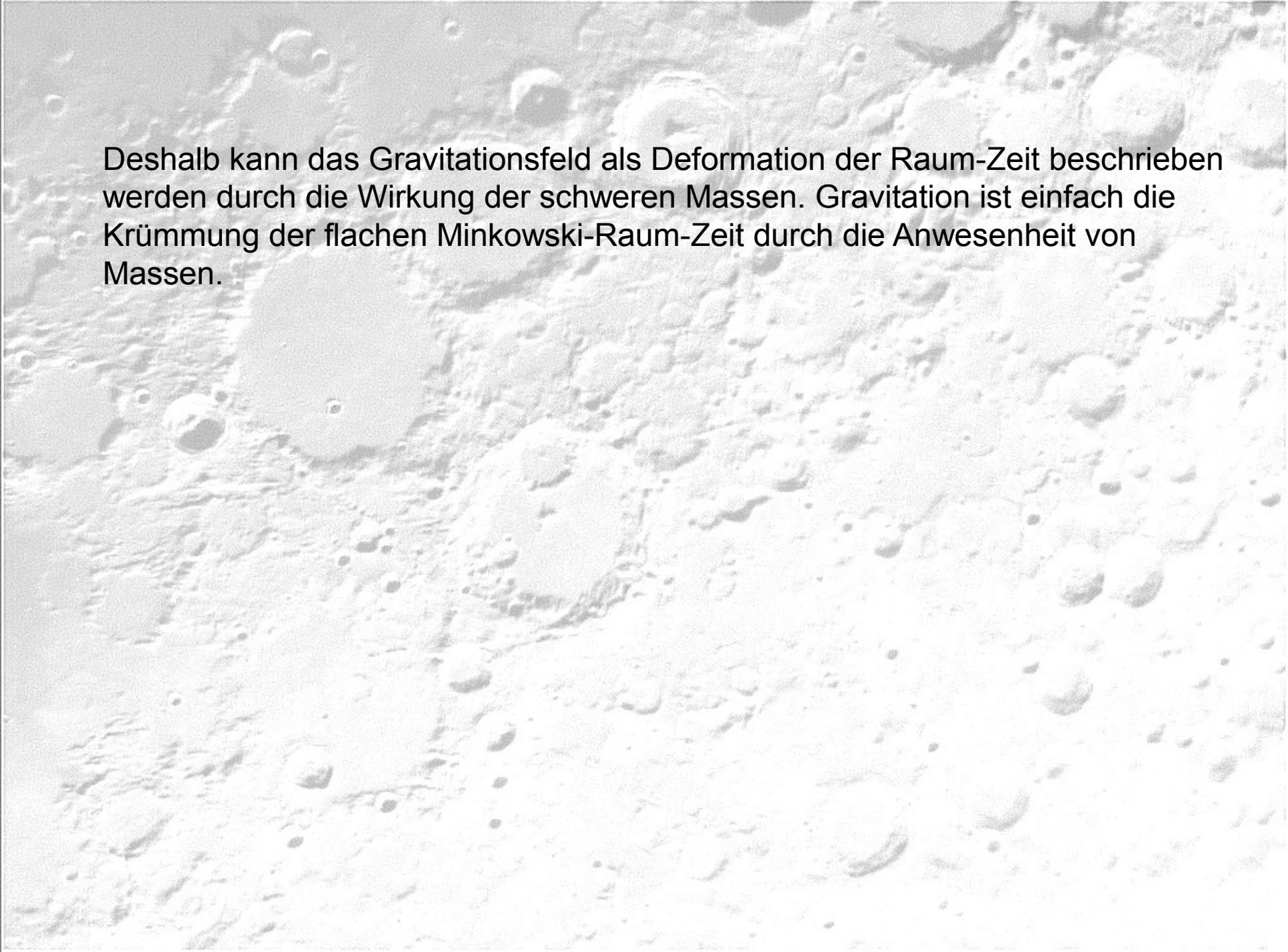
Unterschiedliche Formulierungen des :

1. Wenn man sich in einem freien Fall befindest, bemerkt man kein Gravitationsfeld, Lichtstrahlen sind gerade Linien. Dies nennt man "lokale Inertialsysteme".
2. In einem lokalen Inertialsystem ist Raum-Zeit flach, es gilt die Spezielle Relativitätstheorie mit den Lorentz-Transformationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Es handelt sich um die Minkowski-Raum-Zeit.



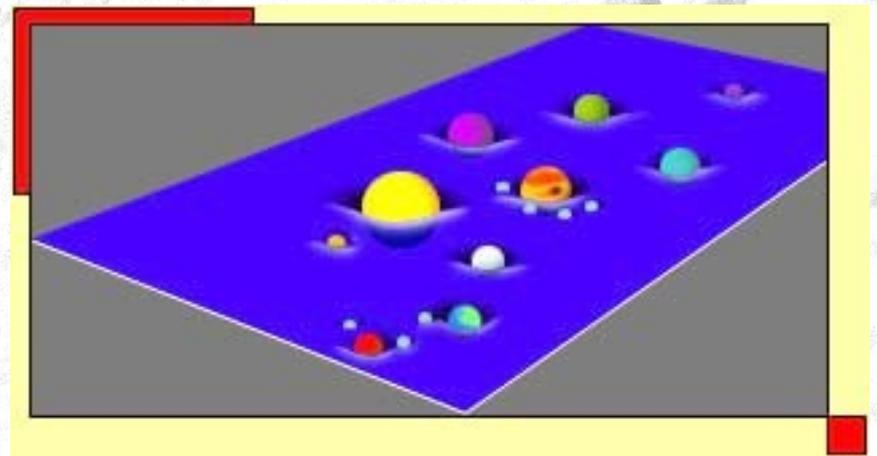
Wenn man in einen gekrümmten Raum einzoomt, erscheint er mehr und mehr flach.

Deshalb kann das Gravitationsfeld als Deformation der Raum-Zeit beschrieben werden durch die Wirkung der schweren Massen. Gravitation ist einfach die Krümmung der flachen Minkowski-Raum-Zeit durch die Anwesenheit von Massen.



Deshalb kann das Gravitationsfeld als Deformation der Raum-Zeit beschrieben werden durch die Wirkung der schweren Massen. Gravitation ist einfach die Krümmung der flachen Minkowski-Raum-Zeit durch die Anwesenheit von Massen.

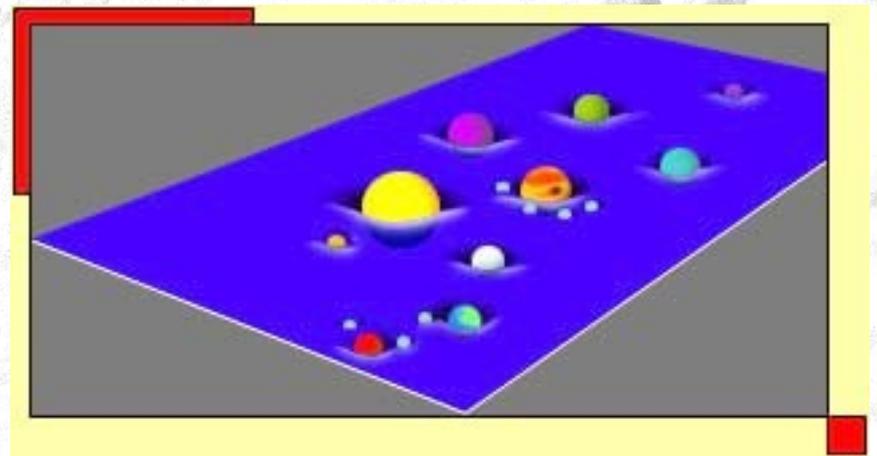
Eine populäre Analogie ist es, sich ein 2-dimensionales Trambolin mit großen Bällen auf der Fläche vorzustellen, die das Trambolin eindrücken.



Deshalb kann das Gravitationsfeld als Deformation der Raum-Zeit beschrieben werden durch die Wirkung der schweren Massen. Gravitation ist einfach die Krümmung der flachen Minkowski-Raum-Zeit durch die Anwesenheit von Massen.

Flache Raum-Zeit existiert, wenn es keine Beschleunigungen gibt. Gekrümmte Raum-Zeit bedeutet Schwerkraft.

Eine populäre Analogie ist es, sich ein 2-dimensionales Trambolin mit großen Bällen auf der Fläche vorzustellen, die das Trambolin eindrücken.

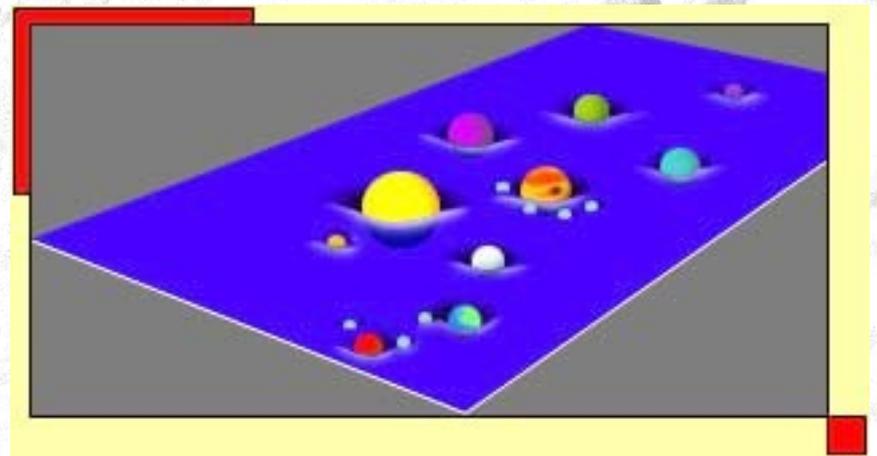


Deshalb kann das Gravitationsfeld als Deformation der Raum-Zeit beschrieben werden durch die Wirkung der schweren Massen. Gravitation ist einfach die Krümmung der flachen Minkowski-Raum-Zeit durch die Anwesenheit von Massen.

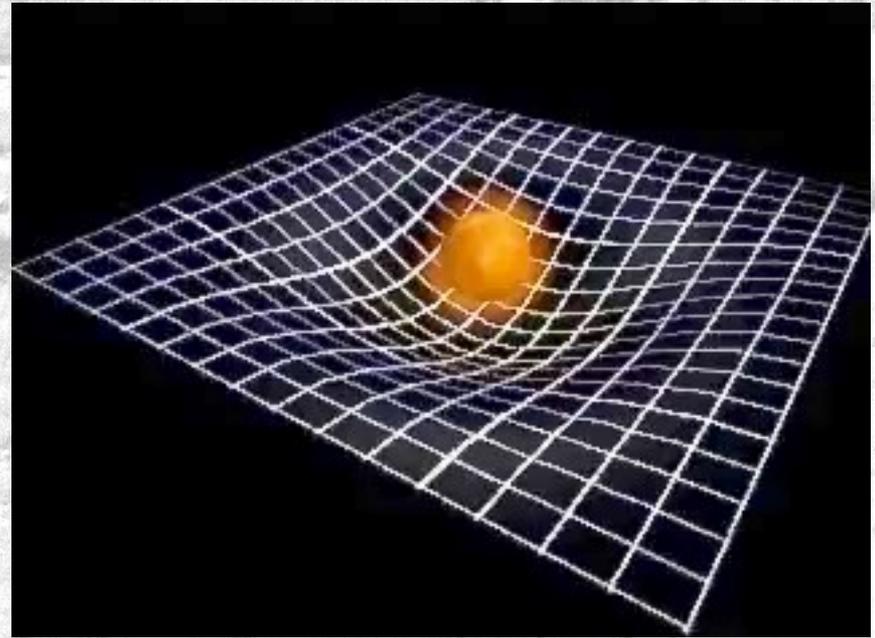
Flache Raum-Zeit existiert, wenn es keine Beschleunigungen gibt. Gekrümmte Raum-Zeit bedeutet Schwerkraft.

“Mass tell space-time how to curve, space-time tells mass how to move” – John Wheeler

Eine populäre Analogie ist es, sich ein 2-dimensionales Trambolin mit großen Bällen auf der Fläche vorzustellen, die das Trambolin eindrücken.

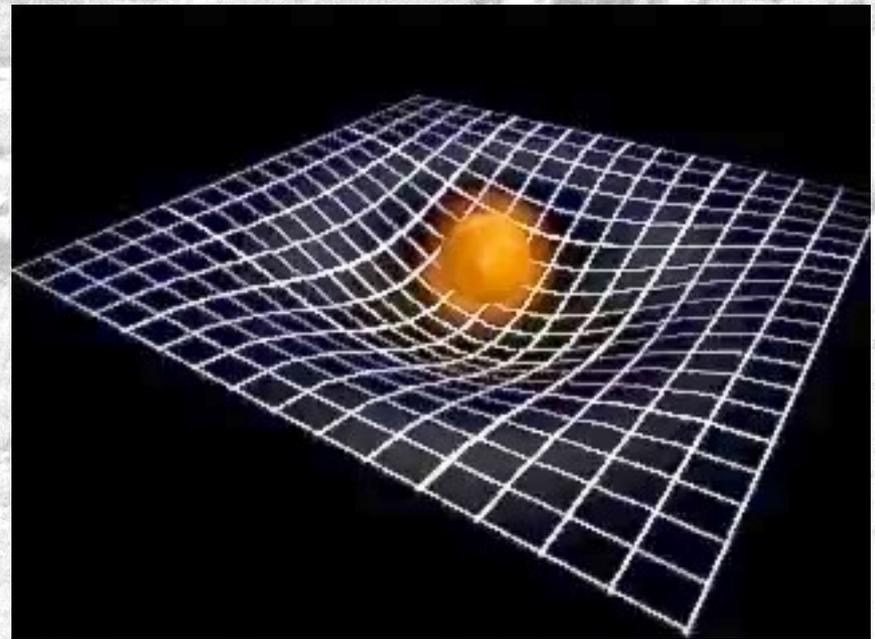


Objekte (Lichtstrahlen, freifallende Satelliten) bewegen sich auf *Geodäten*, kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten.



Objekte (Lichtstrahlen, frei-fallende Satelliten) bewegen sich auf *Geodäten*, kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten.

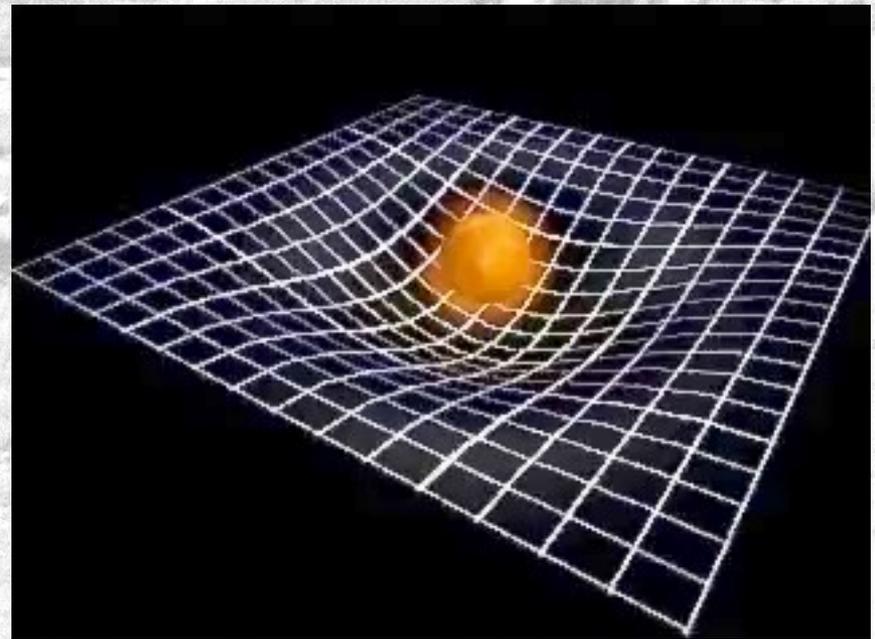
In gekrümmten Räumen können das Ellipsen sein (wie bei Planeten).



Objekte (Lichtstrahlen, frei-fallende Satelliten) bewegen sich auf *Geodäten*, kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten.

In gekrümmten Räumen können das Ellipsen sein (wie bei Planeten).

In der Tat sind Trajektorien in durch eine schwer Masse gekrümmten Räumen Kegelschnitte:



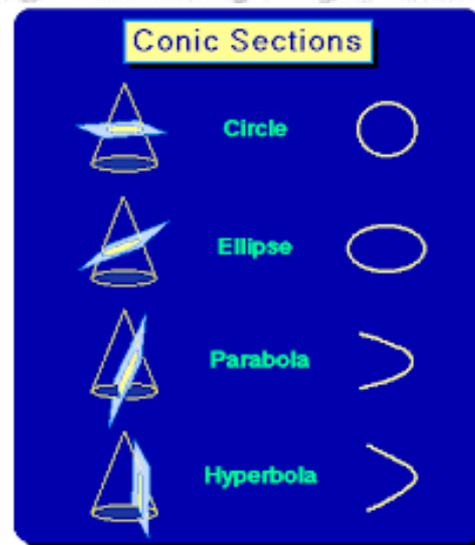
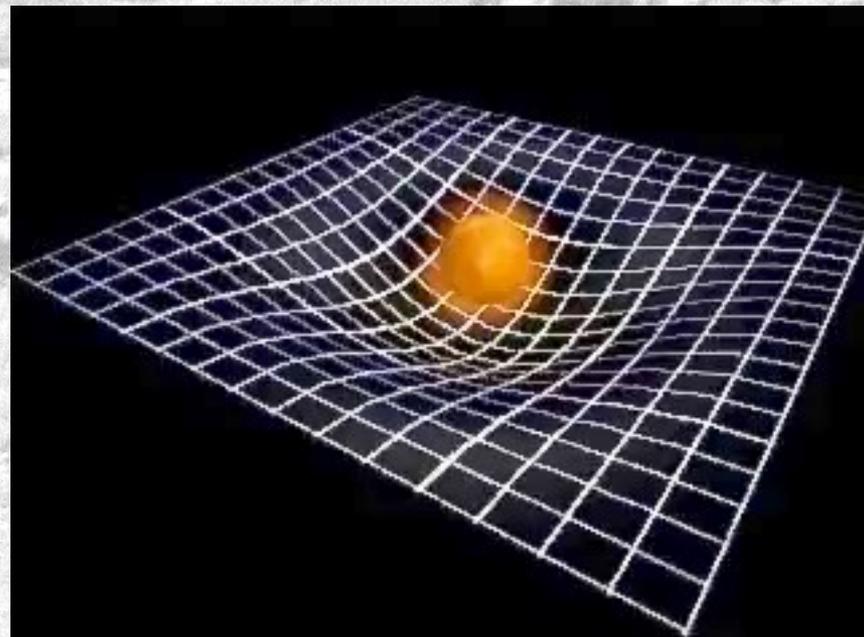
Objekte (Lichtstrahlen, freifallende Satelliten) bewegen sich auf *Geodäten*, kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten

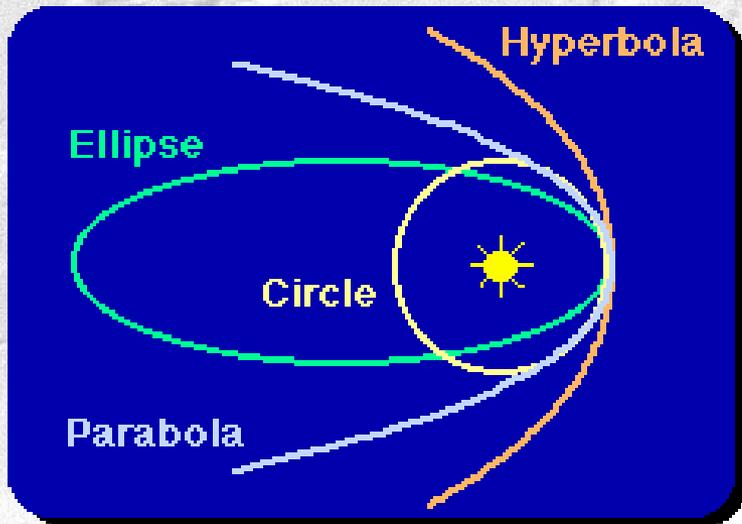
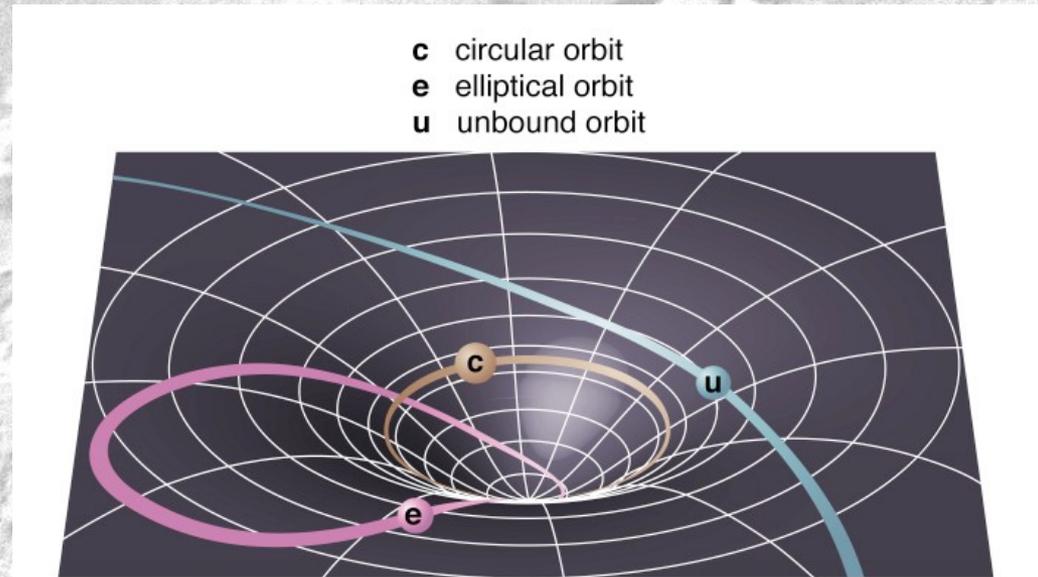
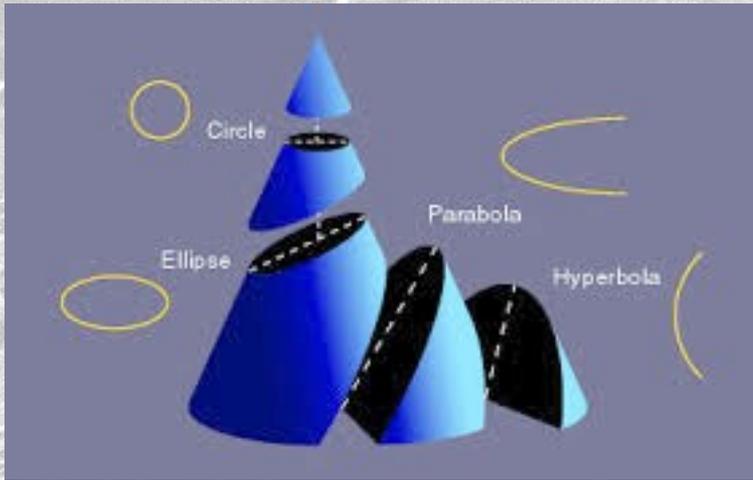
In gekrümmten Räumen können das Ellipsen sein (wie bei Planeten).

In der Tat sind Trajektorien in durch eine schwer Masse gekrümmten Räumen Kegelschnitte:

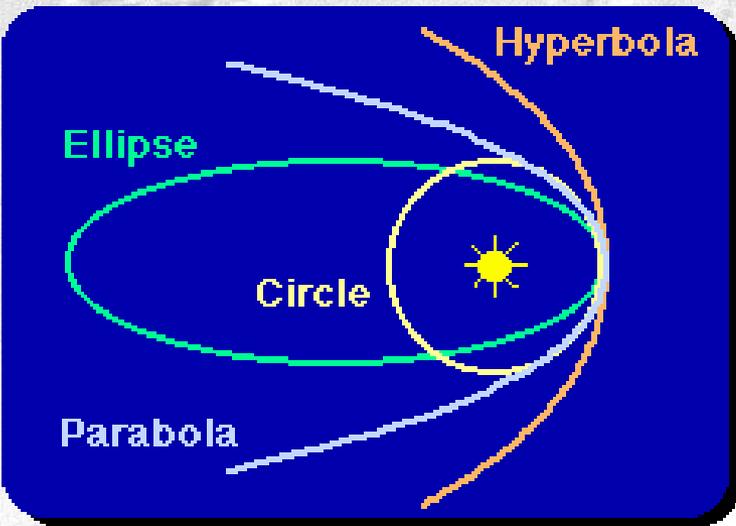
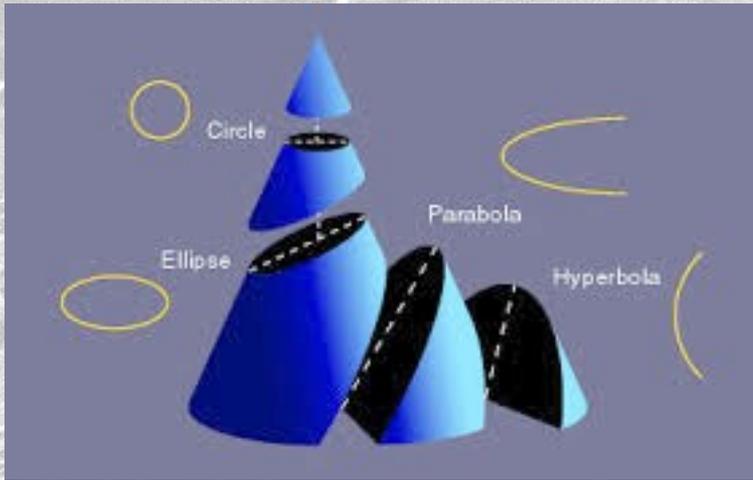
Das sind:

- Kreise
- Ellipsen
- Parabeln
- Hyperbeln

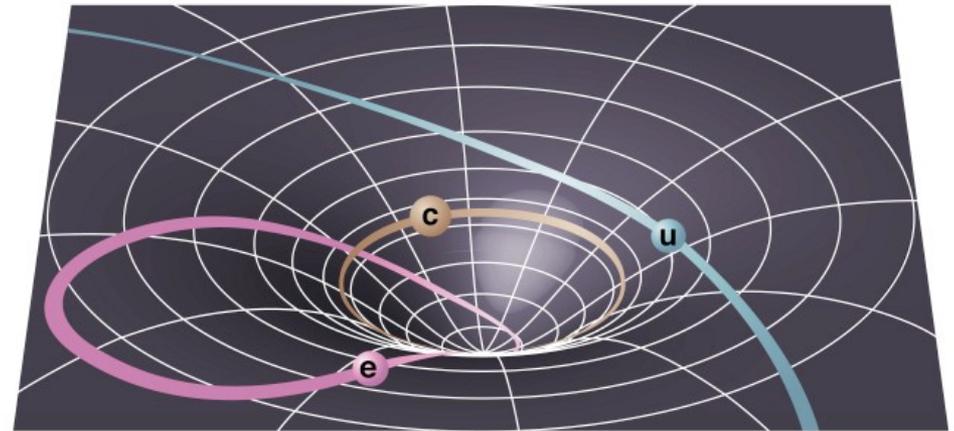




Einige Planeten (wie die Venus) haben Bahnen mit so kleiner Exzentrizität, dass diese im wesentlichen Kreise darstellen. Im allgemeinen bewegen sich Planeten auf **Ellipsen**.

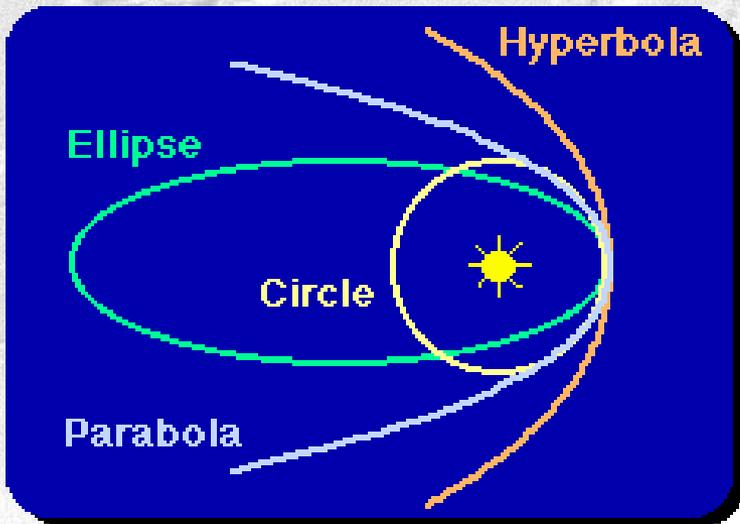
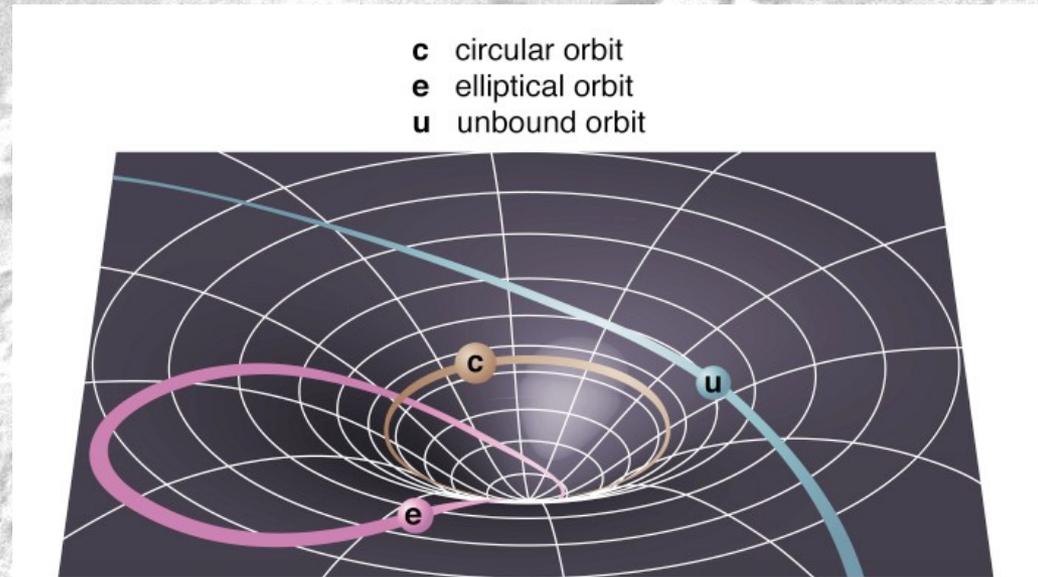
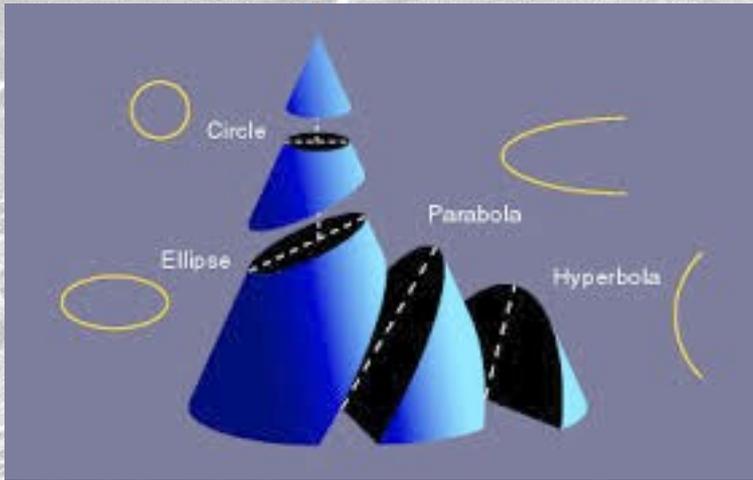


- c circular orbit
- e elliptical orbit
- u unbound orbit



Einige Planeten (wie die Venus) haben Bahnen mit so kleiner Exzentrizität, dass diese im wesentlichen Kreise darstellen. Im allgemeinen bewegen sich Planeten auf **Ellipsen**.

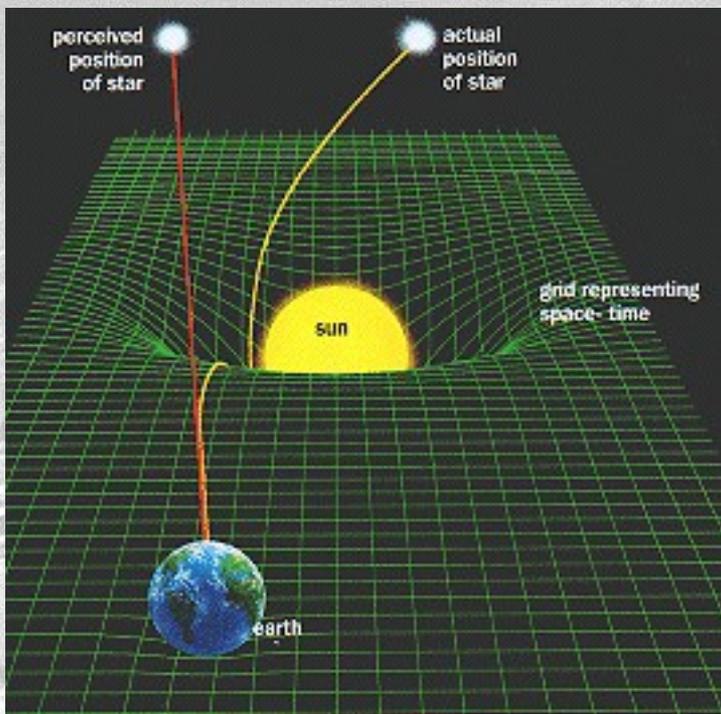
Kometen bewegen sich oft auf **Parabel-**Bahnen.



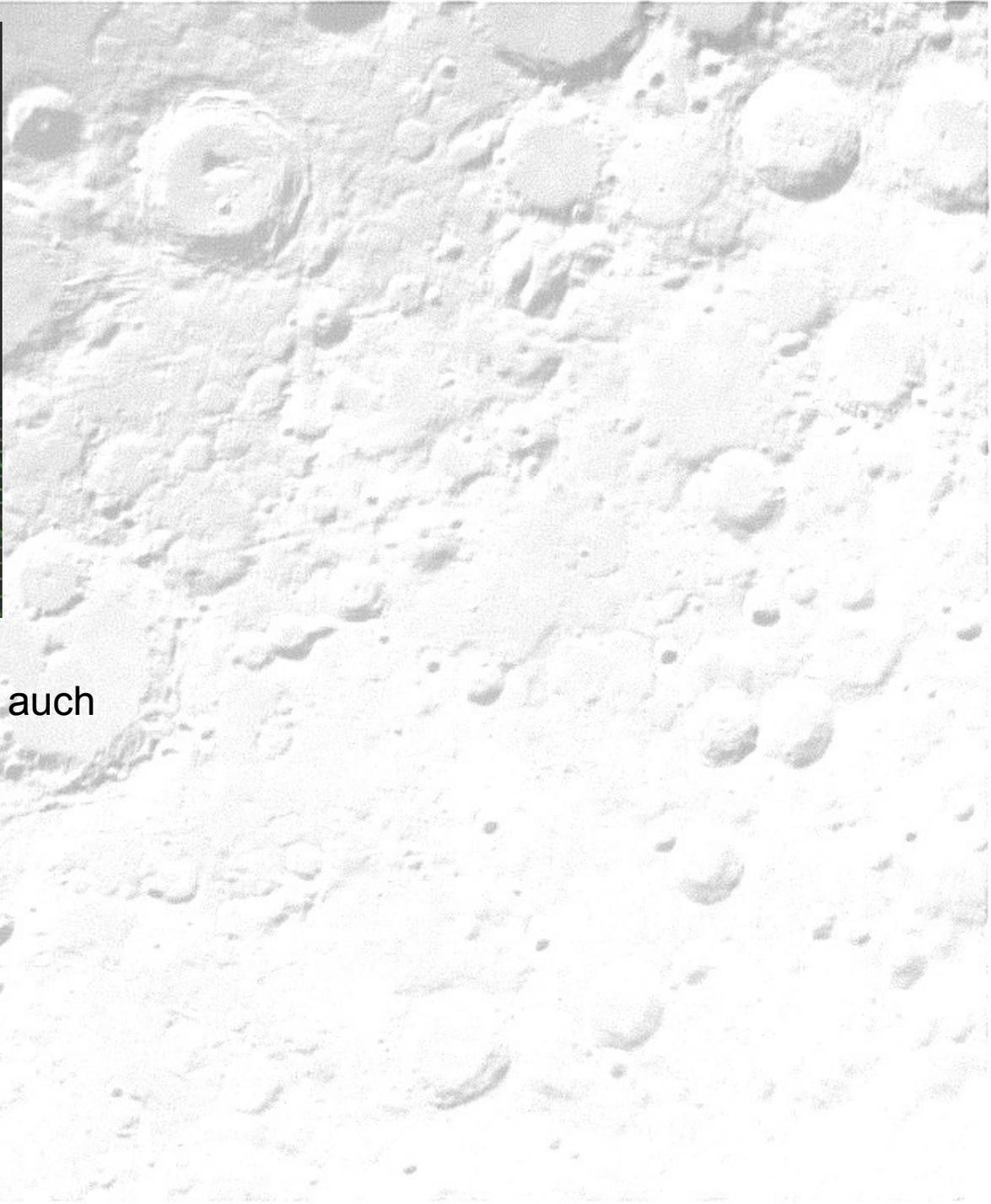
Einige Planeten (wie die Venus) haben Bahnen mit so kleiner Exzentrizität, dass diese im wesentlichen Kreise darstellen. Im allgemeinen bewegen sich Planeten auf **Ellipsen**.

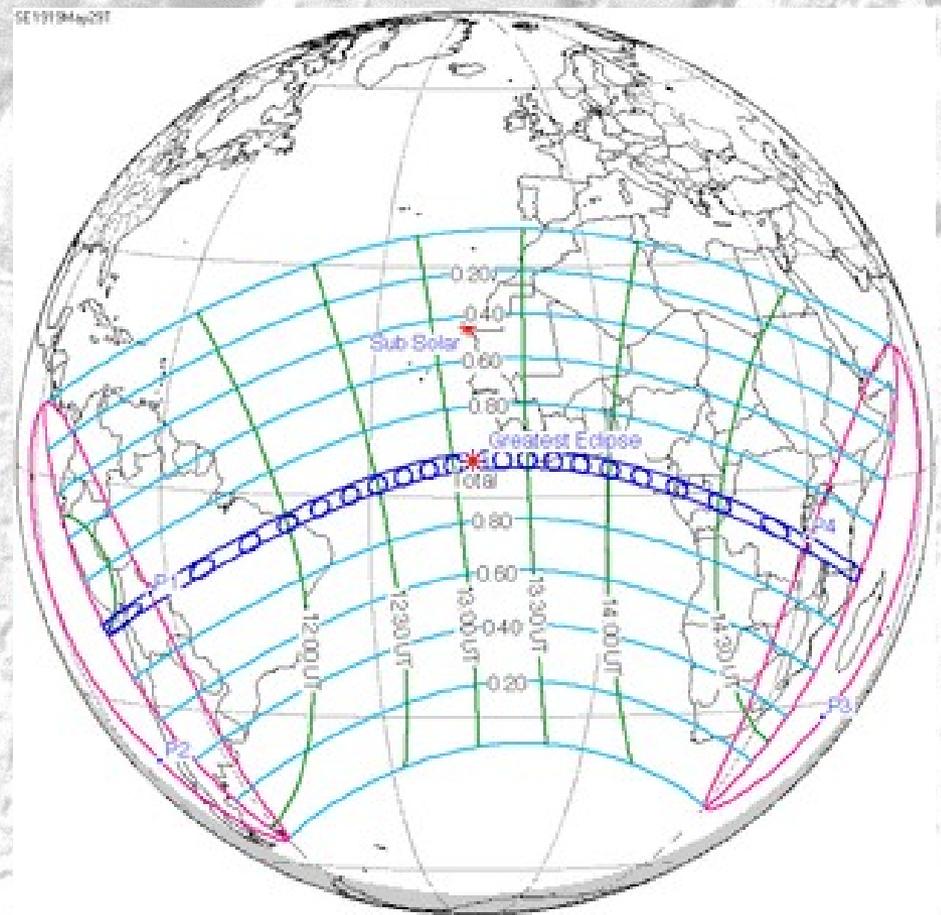
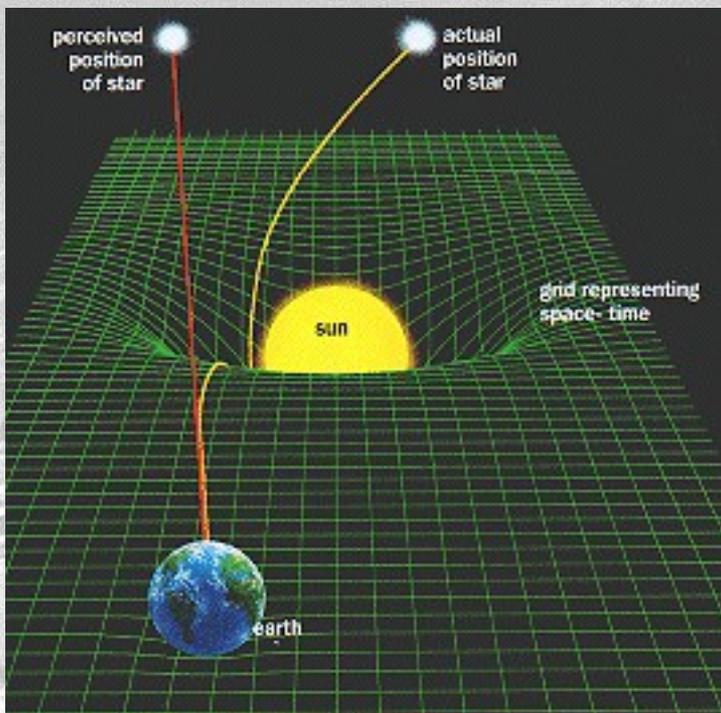
Kometen bewegen sich oft auf **Parabel**-Bahnen.

Zwei gravitativ wechselwirkende Sterne streuen sich aneinander auf **Hyperbel**bahnen.



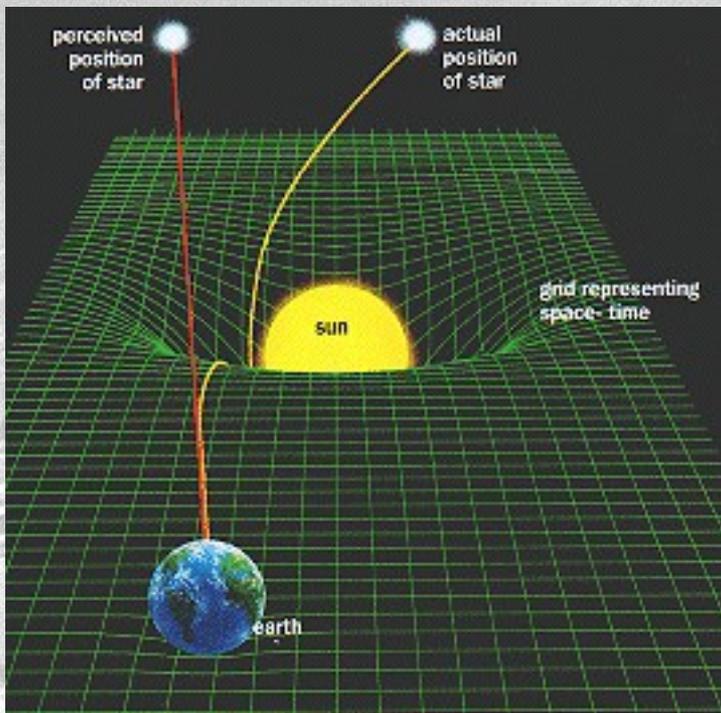
Die Krümmung von Raum heisst auch
das Licht nicht gerade geht





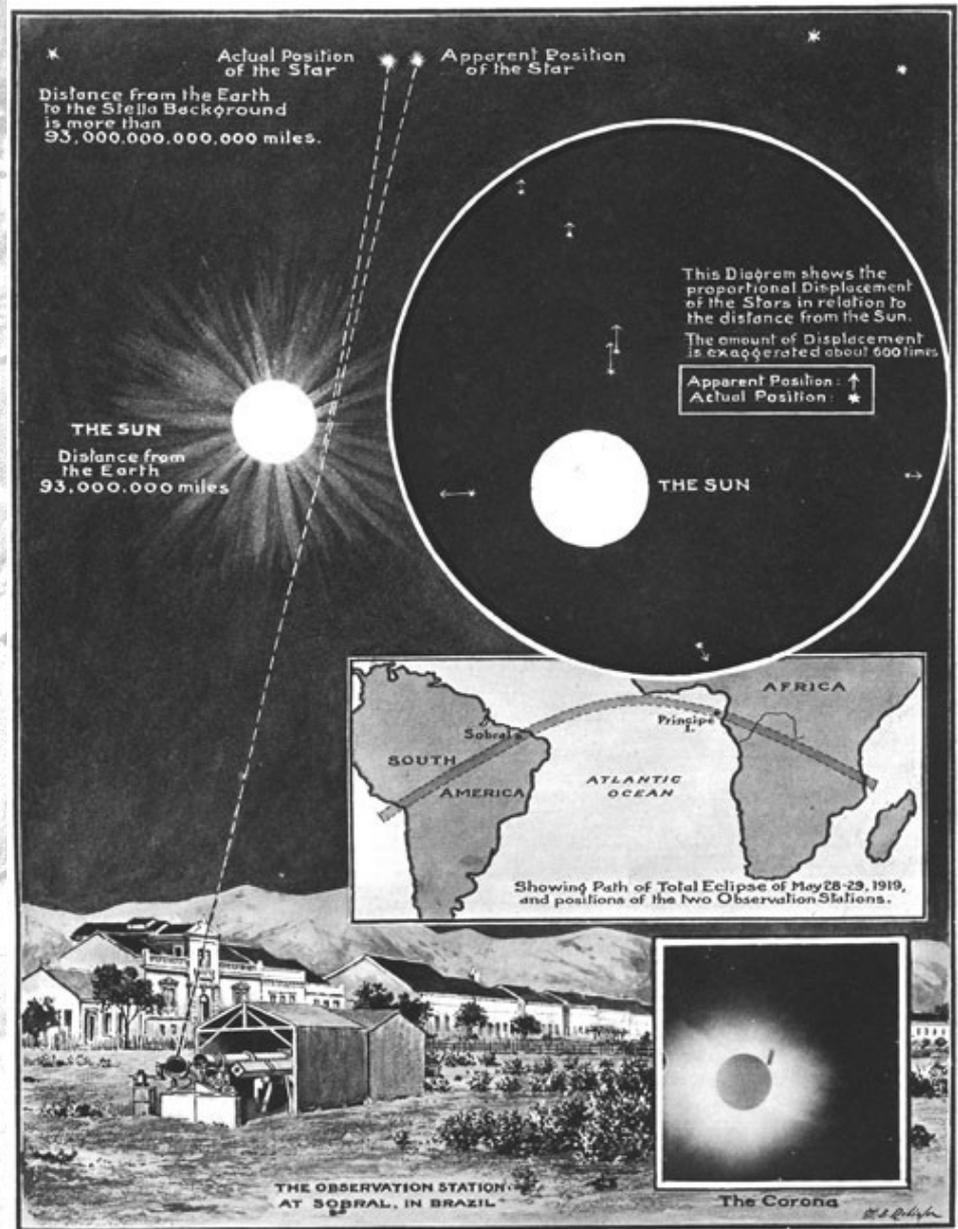
Die Krümmung von Raum heisst auch das Licht nicht gerade geht

Das war der erste Test der Relativitätstheorie durch Arthur Eddington während einer Sonnenfinsternis im Jahr 1919 bei einer Exkursion zur Vulkaninsel Principe.

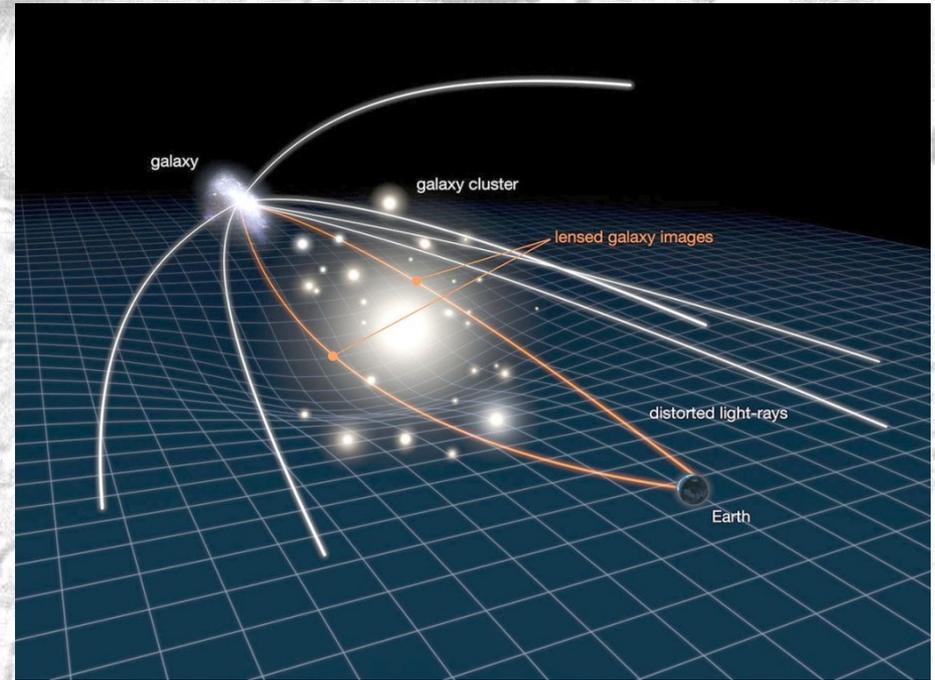


Die Krümmung von Raum heisst auch das Licht nicht gerade geht

Das war der erste Test der Relativitätstheorie durch Arthur Eddington während einer Sonnenfinsternis im Jahr 1919 bei einer Exkursion zur Vulkaninsel Principe.



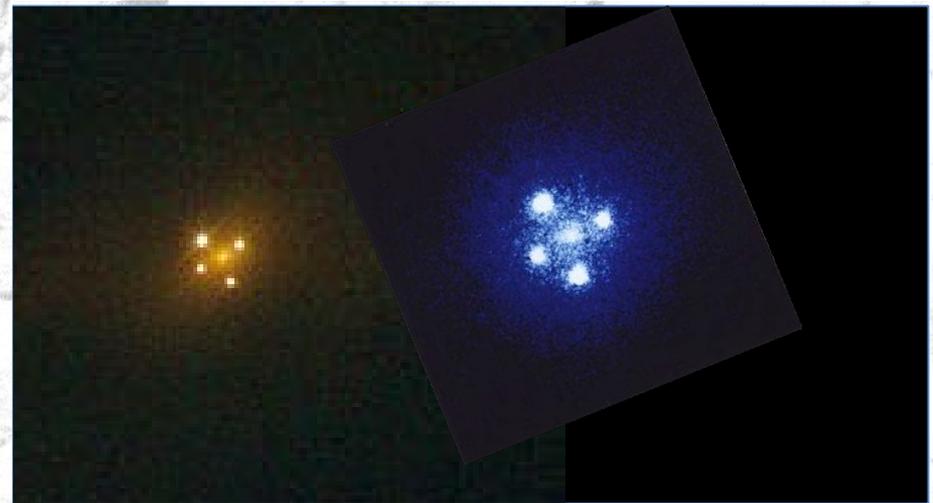
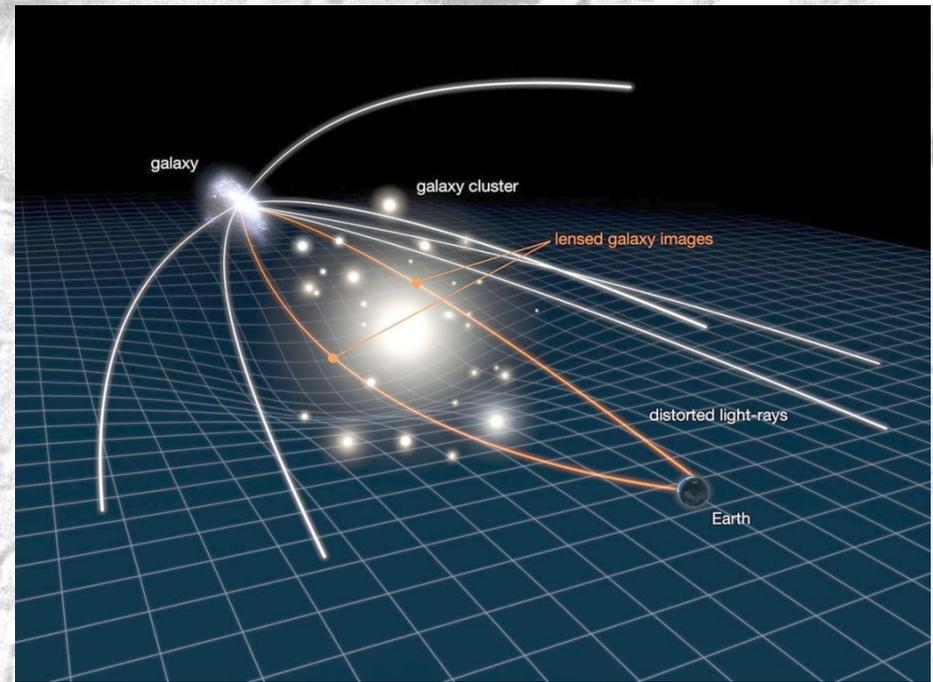
Alle massiven Objekte verursachen eine Lichtablenkung. Das ist besonders auffällig, wenn das Licht einer entfernten Galaxie auf dem Weg zur Erde einen riesigen Galaxienhaufen (einige 1000 Galaxien) durchdringt.



Alle massiven Objekte verursachen eine Lichtablenkung. Das ist besonders auffällig, wenn das Licht einer entfernten Galaxie auf dem Weg zur Erde einen riesigen Galaxienhaufen (einige 1000 Galaxien) durchdringt.

Das ist das Einstein-Kreuz, auch bekannt als Q2237+030.

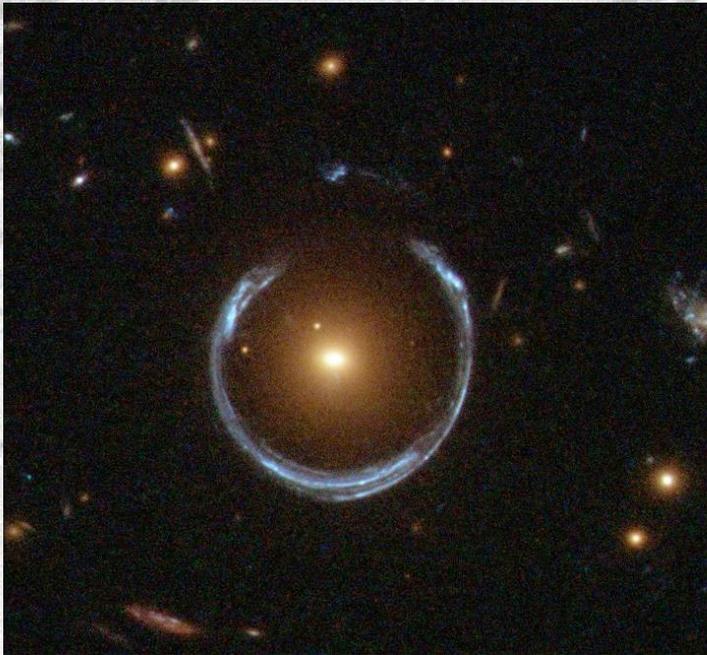
Licht von einem fernen Quasar ($\sim 8 \times 10^9$ km Entfernung) wird abgelenkt ('lensed') durch eine Vordergrund-Galaxy (in 4×10^8 km Entfernung)



Wenn die Geometrie gerade "stimmt", kann man auch Ringe als Bilder entfernter Objekte finden. Diesen heißen "Einstein-Ringe".

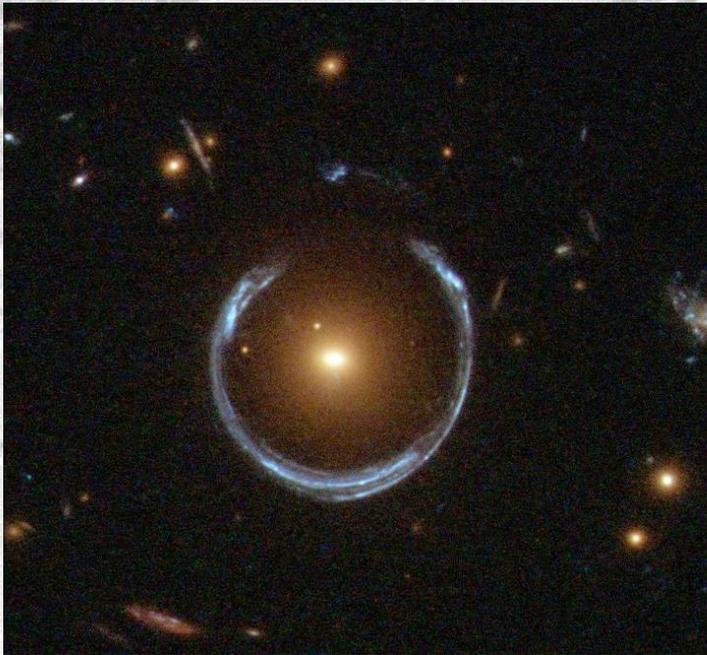


Wenn die Geometrie gerade “stimmt”, kann man auch Ringe als Bilder entfernter Objekte finden. Diesen heißen “Einstein-Ringe”.



Die große rote Galaxie hat die blaue Hintergrundquelle ‘gelinst’.

Wenn die Geometrie gerade “stimmt”, kann man auch Ringe als Bilder entfernter Objekte finden. Diesen heißen “Einstein-Ringe”.



Die große rote Galaxie hat die blaue Hintergrundquelle ‘gelinst’.

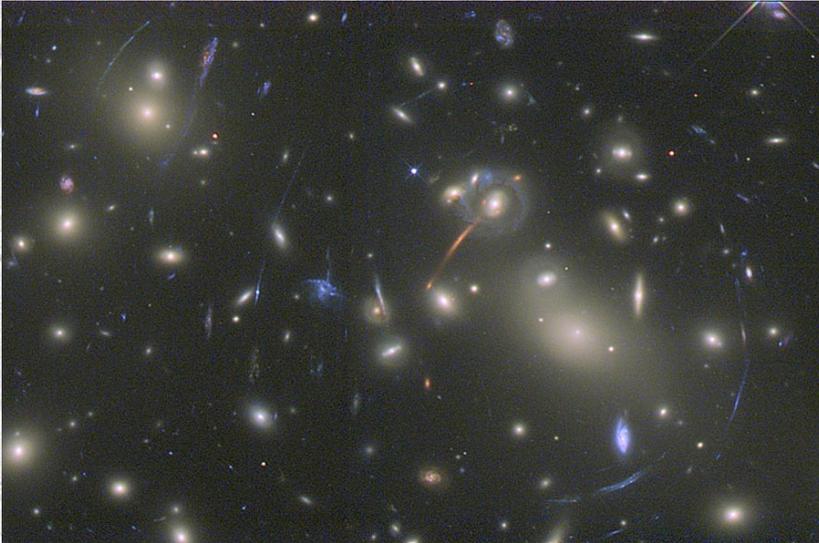


Ein “smiley”-Bild der SDSS Galaxie J1038+4849

Der Effekt kann sehr beachtlich sein, etwa durch Galaxiencluster kann man Duzende von 'gelinsten' Bildern sehen.



Der Effekt kann sehr beachtlich sein, etwa durch Galaxiencluster kann man Duzende von 'gelinsten' Bildern sehen.



Abell 2218 hat vielfache 'gravitative Bögen' (arcs).



Distant Galaxy Lensed by Cluster Abell 2218
Hubble Space Telescope-WFPC2-ACS

ESA, NASA, J.-P. Kneib (Caltech/Observatoire Midi-Pyrénées) and R. Ellis (Caltech) STScI-PRC04-08

Der Effekt kann sehr beachtlich sein, etwa durch Galaxiencluster kann man Duzende von 'gelinsten' Bildern sehen.



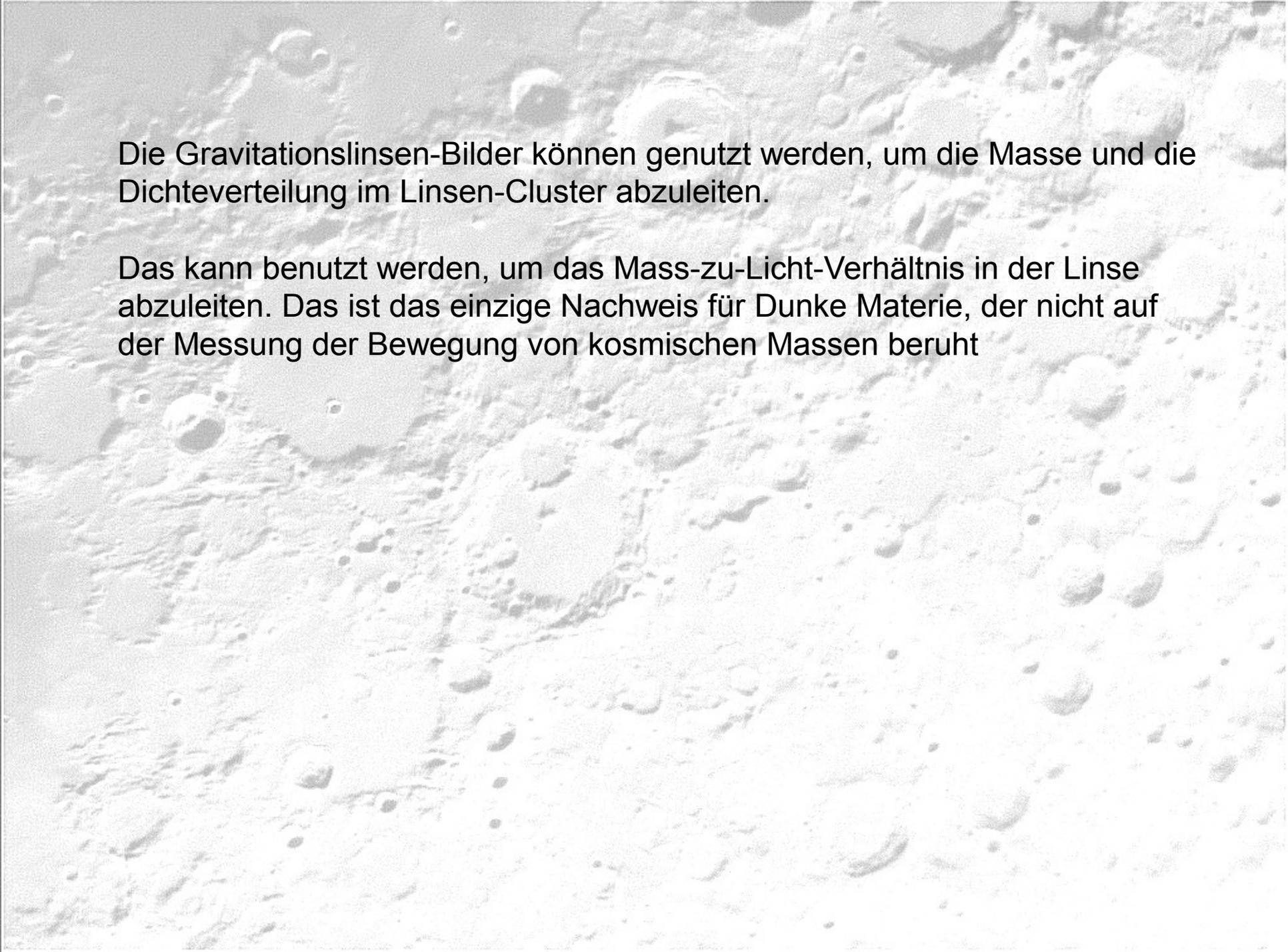
Abell 2218 hat vielfache 'gravitative Bögen' (arcs).

Die abgebildete Galaxie war bei der Entdeckung die entfernteste nachgewiesene Galaxie im Universum, beobachtet bei einem Alter des Universum von 750 Millionen Jahren.



Die Gravitationslinsen-Bilder können genutzt werden, um die Masse und die Dichteverteilung im Linsen-Cluster abzuleiten.



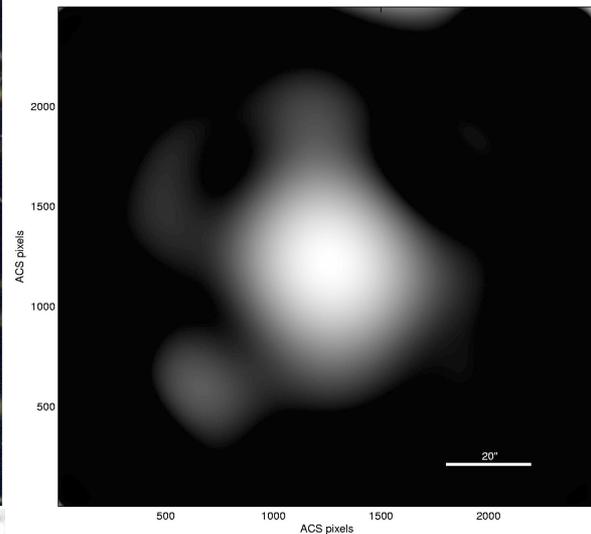
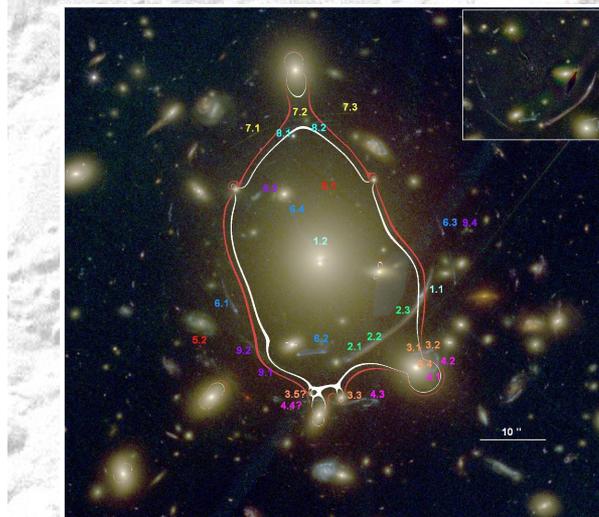
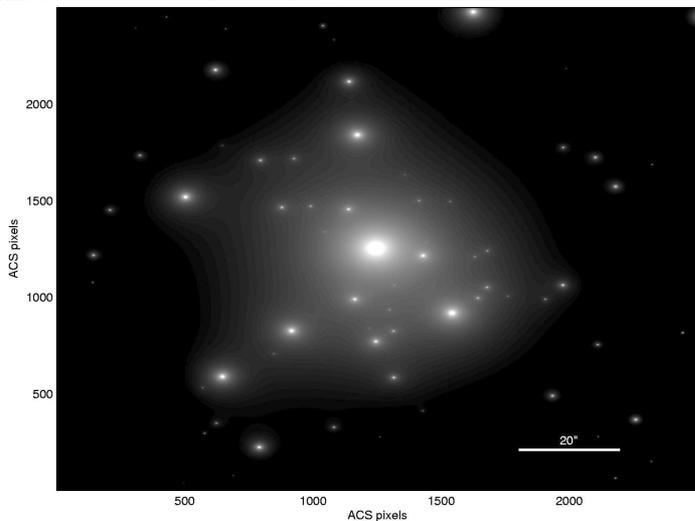


Die Gravitationslinsen-Bilder können genutzt werden, um die Masse und die Dichteverteilung im Linsen-Cluster abzuleiten.

Das kann benutzt werden, um das Mass-zu-Licht-Verhältnis in der Linse abzuleiten. Das ist das einzige Nachweis für Dunkle Materie, der nicht auf der Messung der Bewegung von kosmischen Massen beruht

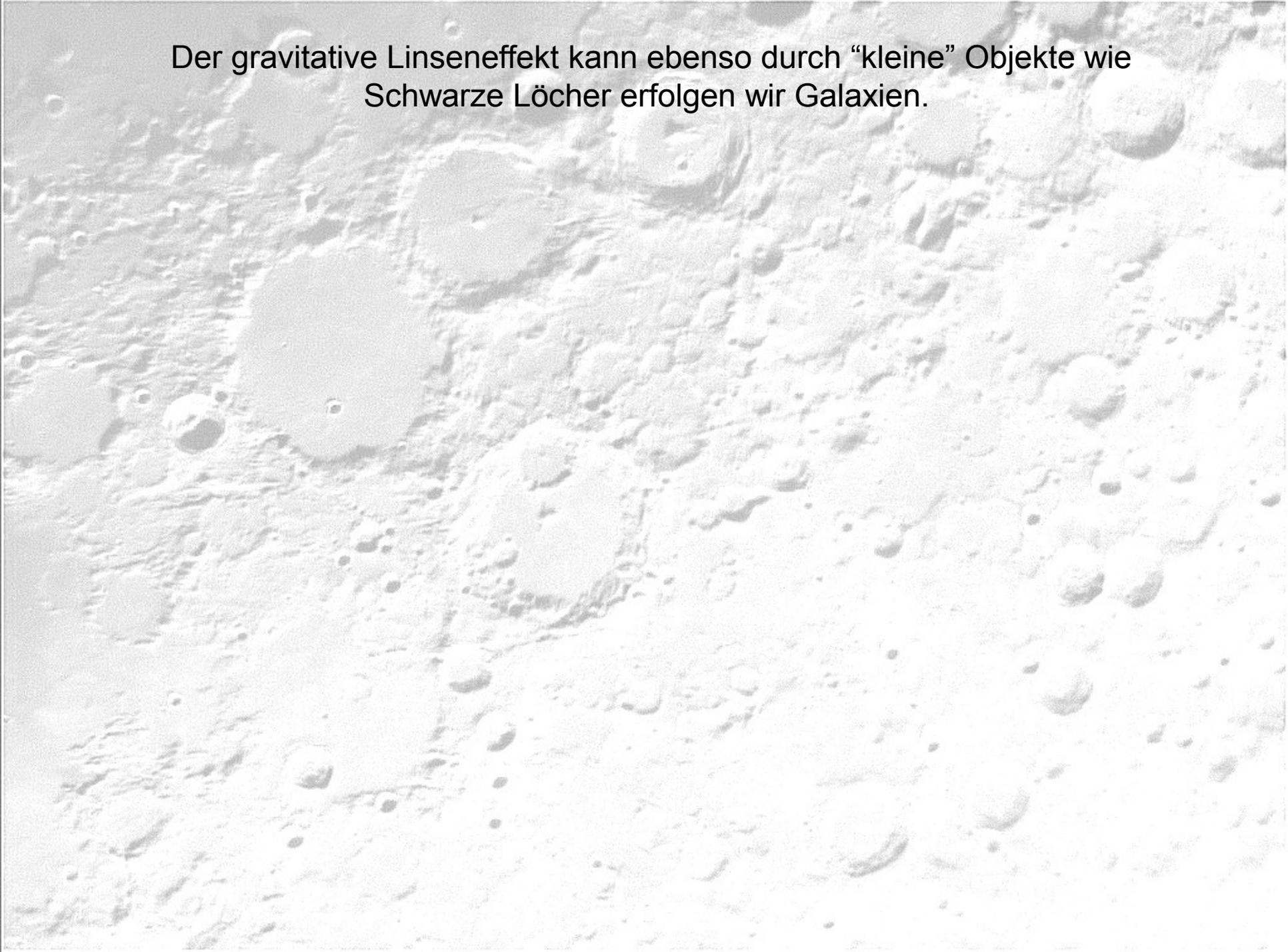
Die Gravitationslinsen-Bilder können genutzt werden, um die Masse und die Dichteverteilung im Linsen-Cluster abzuleiten.

Das kann benutzt werden, um das Mass-zu-Licht-Verhältnis in der Linse abzuleiten. Das ist das einzige Nachweis für Dunkle Materie, der nicht auf der Messung der Bewegung von kosmischen Massen beruht.



Abell 383

Der gravitative Linseneffekt kann ebenso durch “kleine” Objekte wie Schwarze Löcher erfolgen wie Galaxien.



Der gravitative Linseneffekt kann ebenso durch “kleine” Objekte wie Schwarze Löcher erfolgen wie Galaxien.



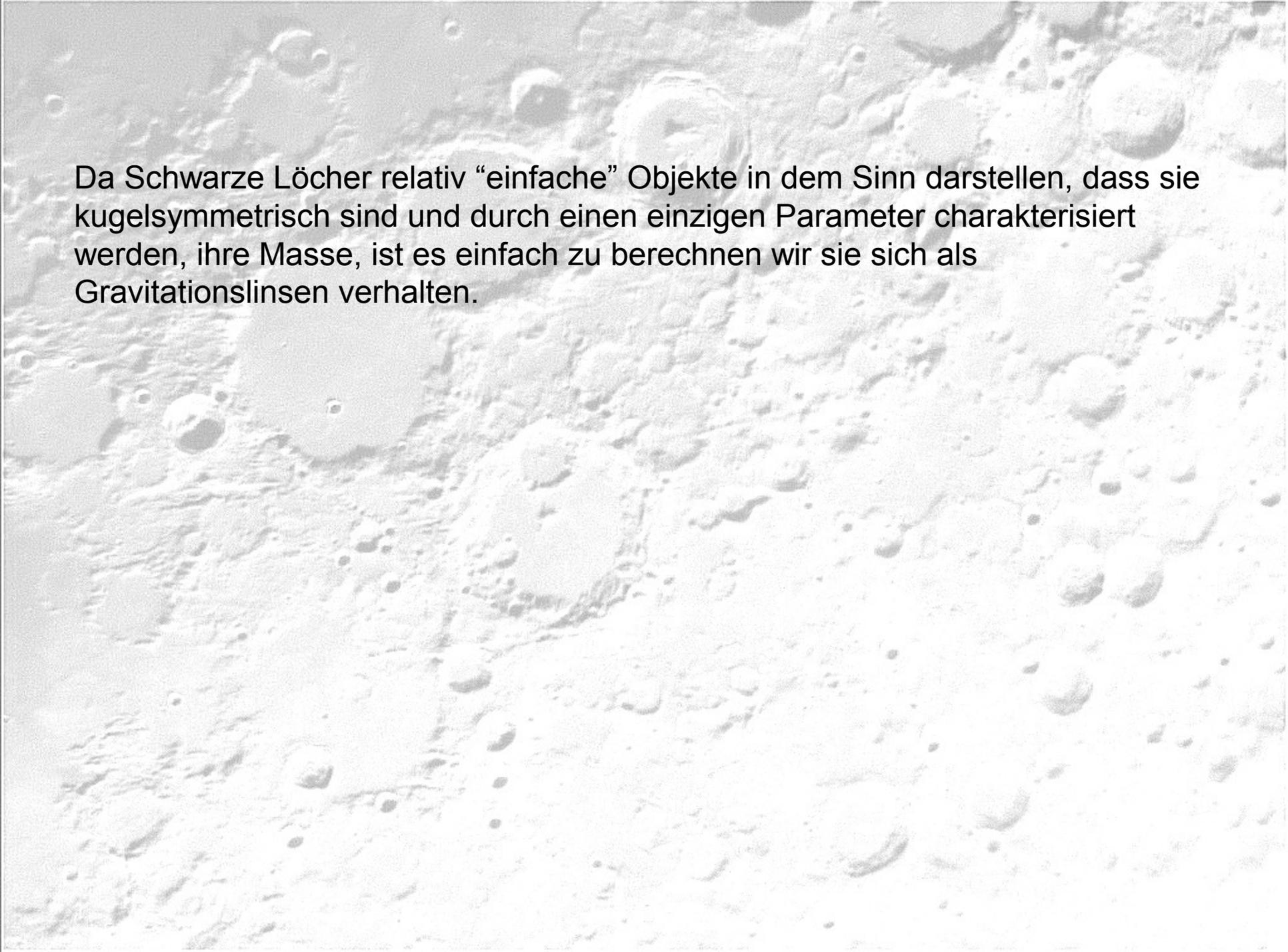
So würde es aussehen, wenn ein Schwarzes Loch zwischen uns und unserer Nachbargalaxie, der Andromeda-Galaxie, vorbeizieht.

Der gravitative Linseneffekt kann ebenso durch “kleine” Objekte wie Schwarze Löcher erfolgen wie Galaxien.



So würde es aussehen, wenn ein Schwarzes Loch zwischen uns und unserer Nachbargalaxie, der Andromeda-Galaxie, vorbeizieht.

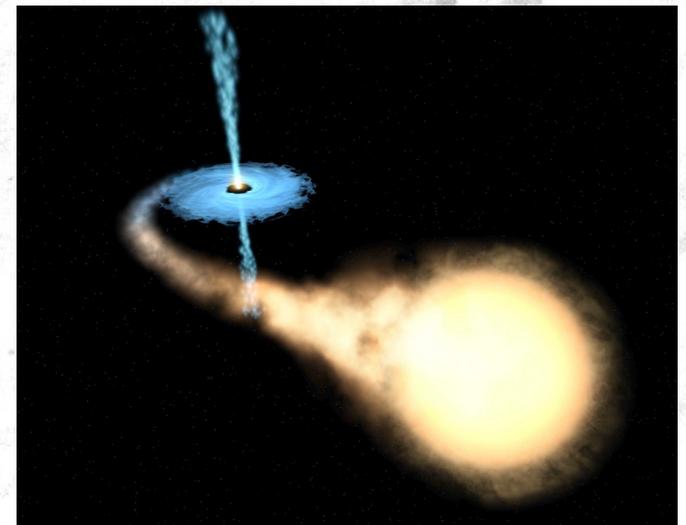
Dies wird “micro-lensing” genannt und kann unter anderem benutzt werden, um Exoplaneten zu entdecken.



Da Schwarze Löcher relativ “einfache” Objekte in dem Sinn darstellen, dass sie kugelsymmetrisch sind und durch einen einzigen Parameter charakterisiert werden, ihre Masse, ist es einfach zu berechnen wie sie sich als Gravitationslinsen verhalten.

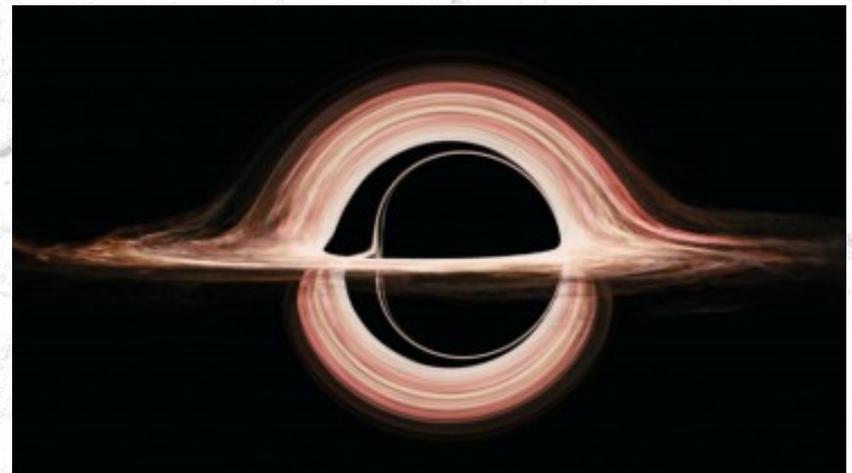
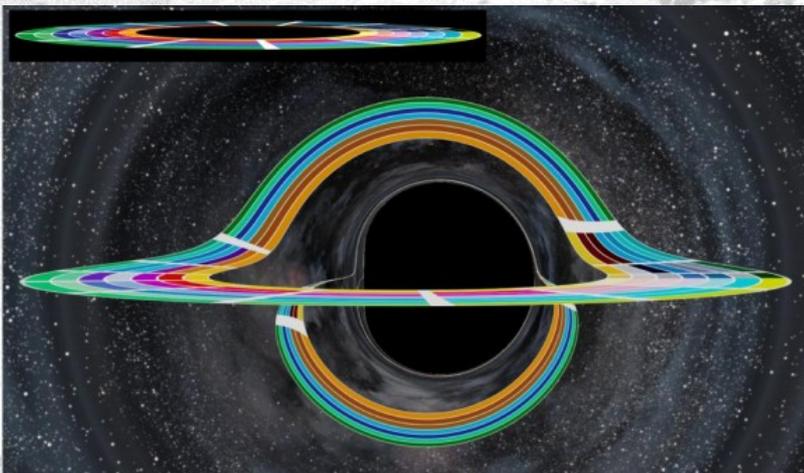
Da Schwarze Löcher relativ “einfache” Objekte in dem Sinn darstellen, dass sie kugelsymmetrisch sind und durch einen einzigen Parameter charakterisiert werden, ihre Masse, ist es einfach zu berechnen wie sie sich als Gravitationslinsen verhalten.

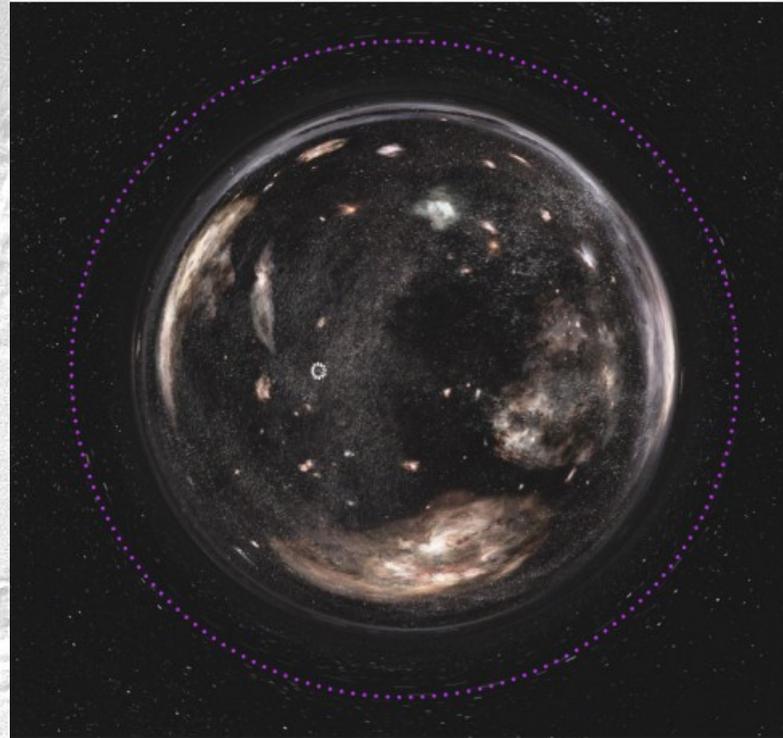
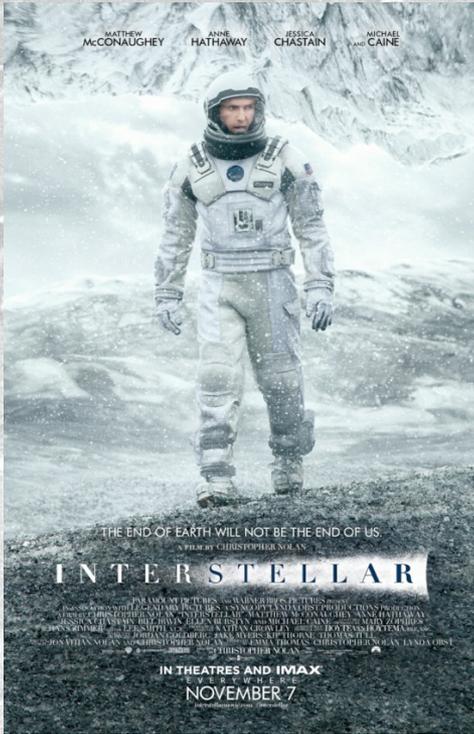
Die meisten Schwarzen Löcher werden durch sogenannte “Akkretionsscheiben” gefüttert. Die bestehen aus einem Hochtemperatur-Plasma, das so heiss ist, dass es wie ein Stern strahlt. Nach solchen Objekten suchen Astronomen bei der Suche nach Schwarzen Löchern..



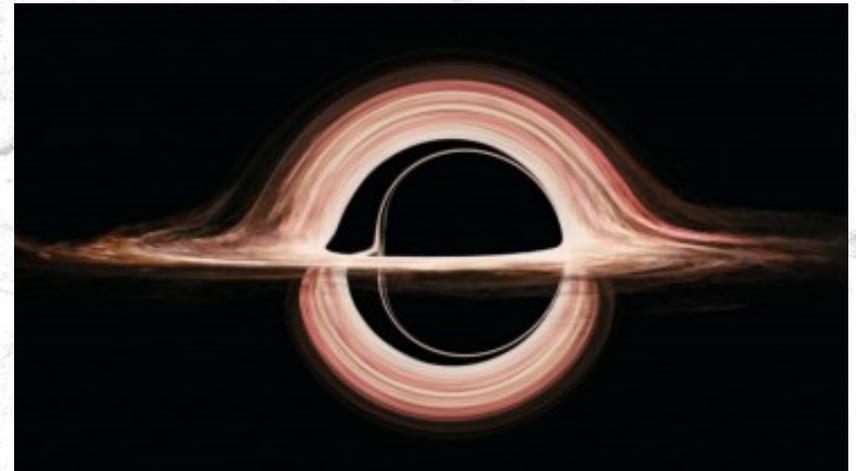
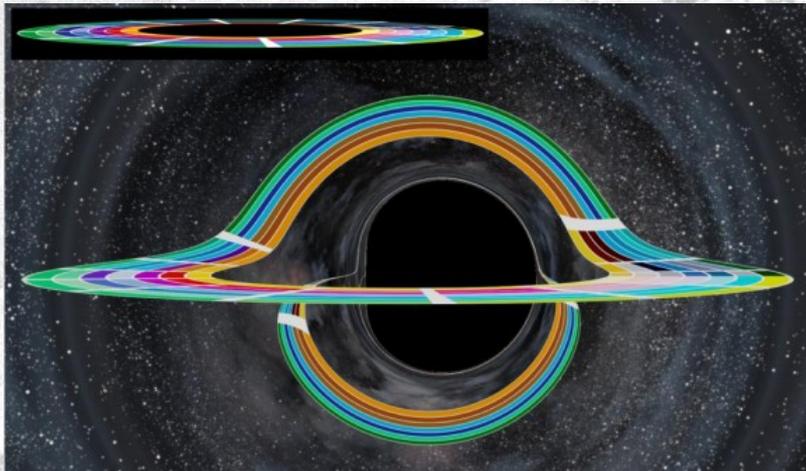
Da Schwarze Löcher relativ “einfache” Objekte in dem Sinn darstellen, dass sie kugelsymmetrisch sind und durch einen einzigen Parameter charakterisiert werden, ihre Masse, ist es einfach zu berechnen wie sie sich als Gravitationslinsen verhalten.

Die meisten Schwarzen Löcher werden durch sogenannte “Akkretionsscheiben” gefüttert. Die bestehen aus einem Hochtemperatur-Plasma, das so heiss ist, dass es wie ein Stern strahlt. Nach solchen Objekten suchen Astronomen bei der Suche nach Schwarzen Löchern. Das Movie *Interstellar* zeigt sehr gut die Deformation einer Akkretionsscheibe durch ein Schwarzes Loch.

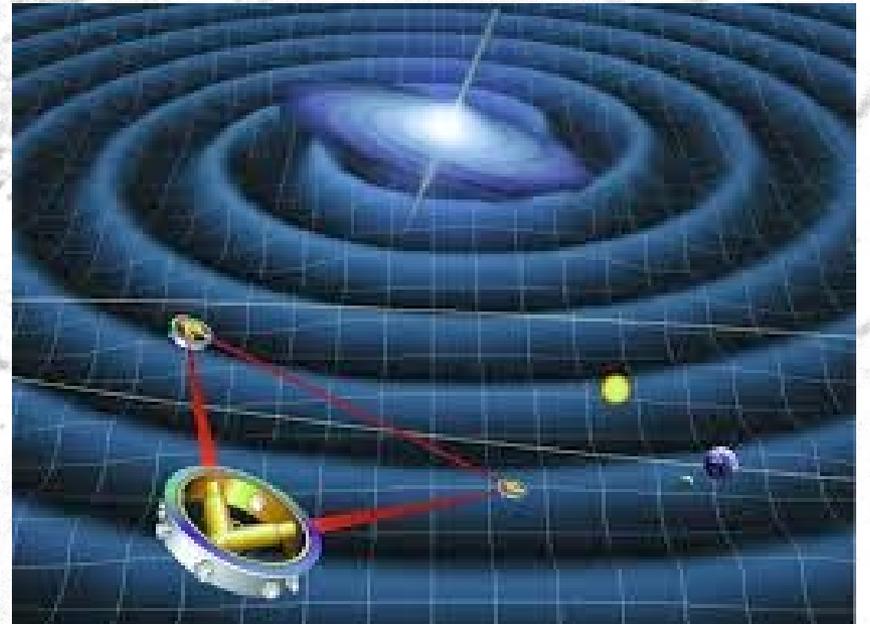




Der Film *interstellar* zeigt sehr genau (wenn auch voll berechnet) das gelinste Bild des vollen Himmels durch ein Wurmloch.

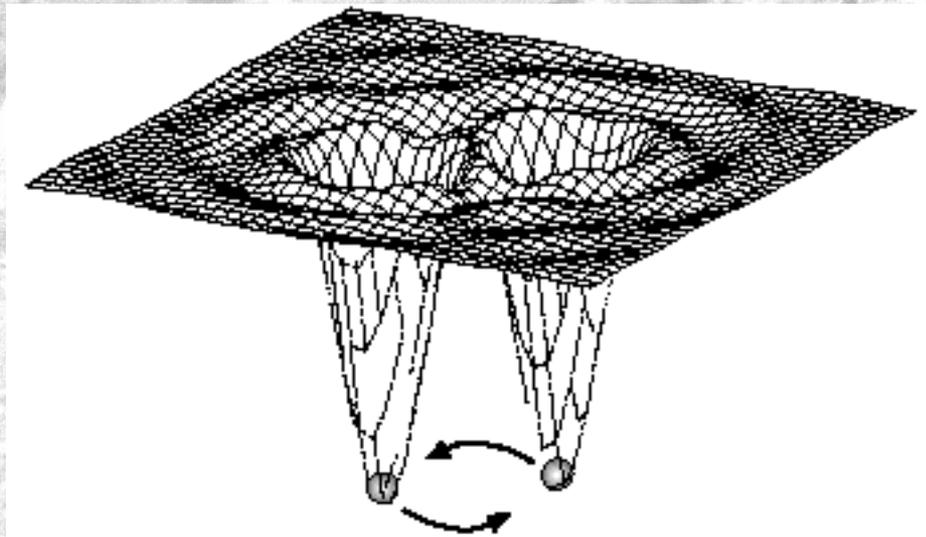


Another kind of geometric disturbance to spacetime are **gravity waves**

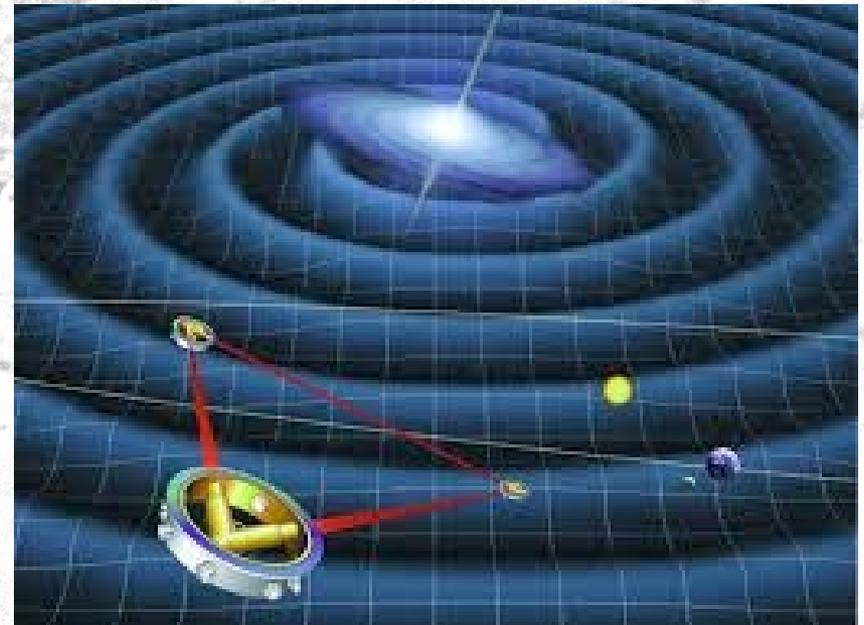


Ein andere Art von geometrischen Störungen der Raum-Zeit sind **Gravitationswellen**.

Kräuselungen der Raumzeit können beispielsweise entstehen, wenn zwei Schwarze Löcher verschmelzen. Es entstehen Gravitationswellen – oszillierende Deformationen der Raum-Zeit.



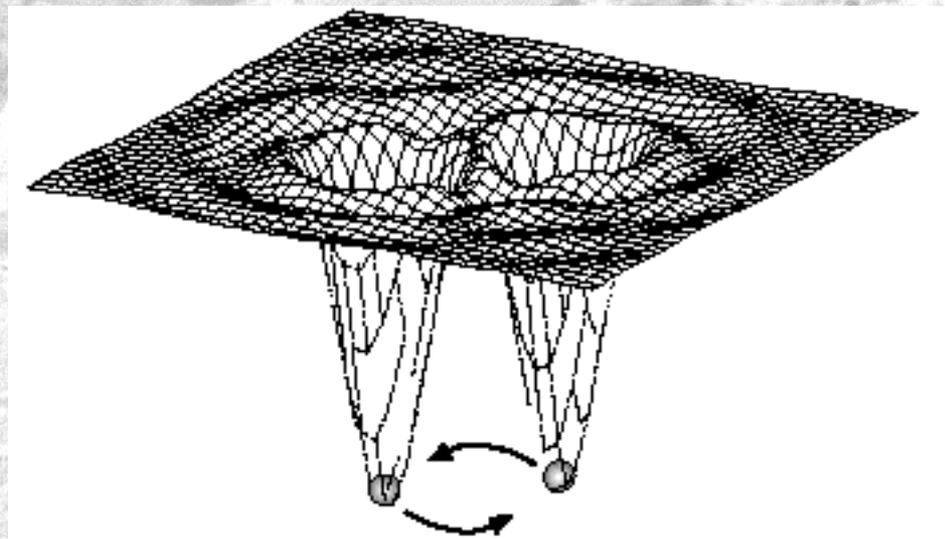
A binary system of compact massive objects rapidly orbiting each other produces ripples in spacetime.



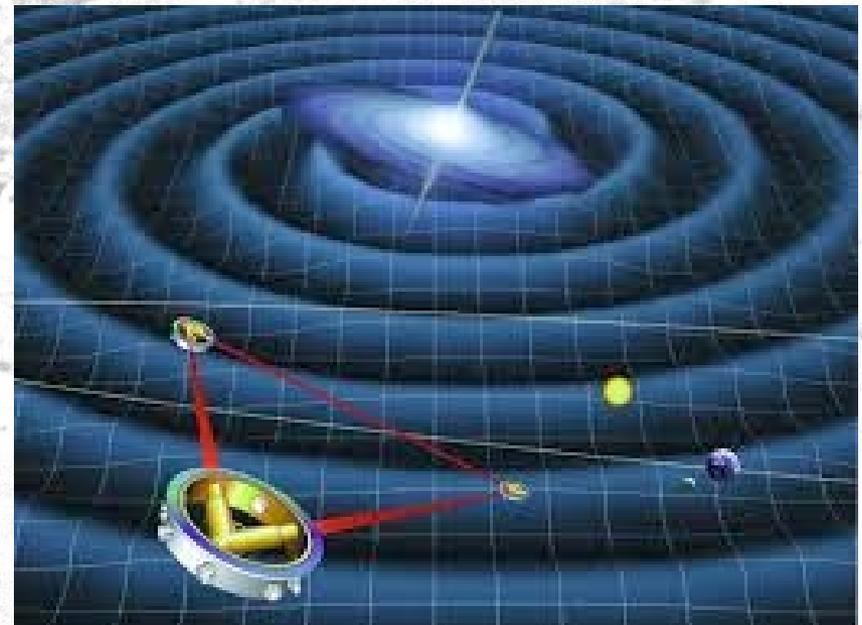
Ein andere Art von geometrischen Störungen der Raum-Zeit sind **Gravitationswellen**.

Kräuselungen der Raumzeit können beispielsweise entstehen, wenn zwei Schwarze Löcher verschmelzen. Es entstehen Gravitationswellen – oszillierende Deformationen der Raum-Zeit.

Es ist zu erwarten, dass diese in Experimenten nachgewiesen werden, bei denen Präzisionslaser die Entfernung von Millionen km zwischen Satelliten durchlaufen.



A binary system of compact massive objects rapidly orbiting each other produces ripples in spacetime.

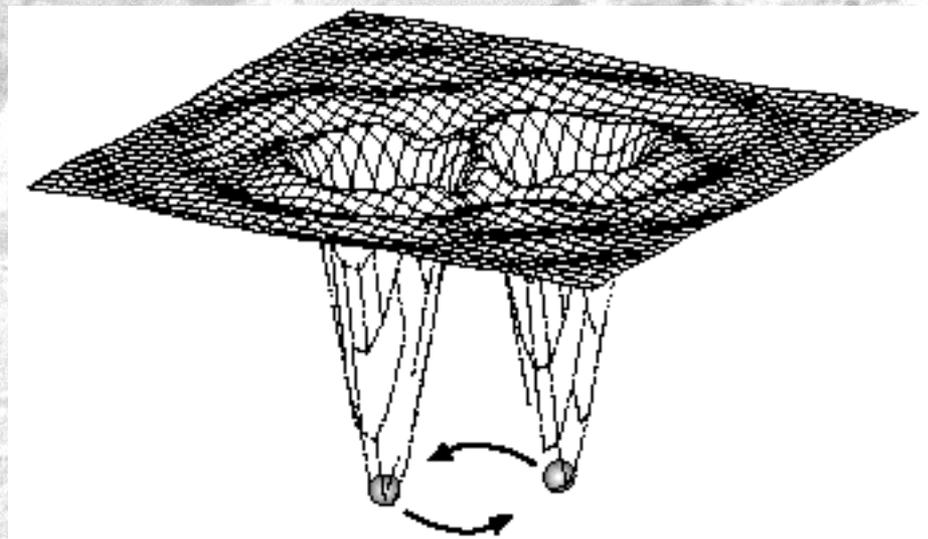


Ein andere Art von geometrischen Störungen der Raum-Zeit sind **Gravitationswellen**.

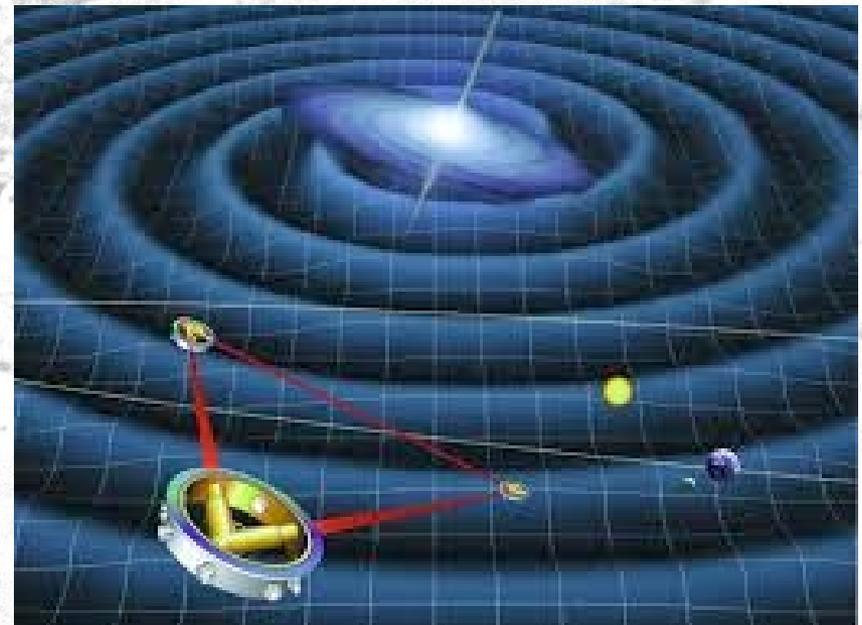
Kräuselungen der Raumzeit können beispielsweise entstehen, wenn zwei Schwarze Löcher verschmelzen. Es entstehen Gravitationswellen – oszillierende Deformationen der Raum-Zeit.

Es ist zu erwarten, dass diese in Experimenten nachgewiesen werden, bei denen Präzisionslaser die Entfernung von Millionen km zwischen Satelliten durchlaufen.

Störungen der Geometrie zwischen den Satelliten werden das Laserlicht ablenken und diese so nachgewiesen werden.



A binary system of compact massive objects rapidly orbiting each other produces ripples in spacetime.



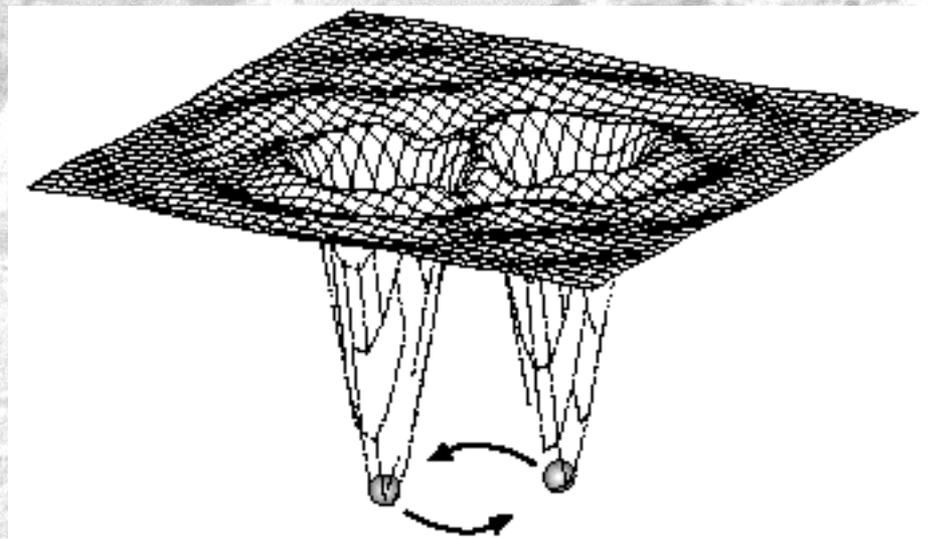
Ein andere Art von geometrischen Störungen der Raum-Zeit sind **Gravitationswellen**.

Kräuselungen der Raumzeit können beispielsweise entstehen, wenn zwei Schwarze Löcher verschmelzen. Es entstehen Gravitationswellen – oszillierende Deformationen der Raum-Zeit.

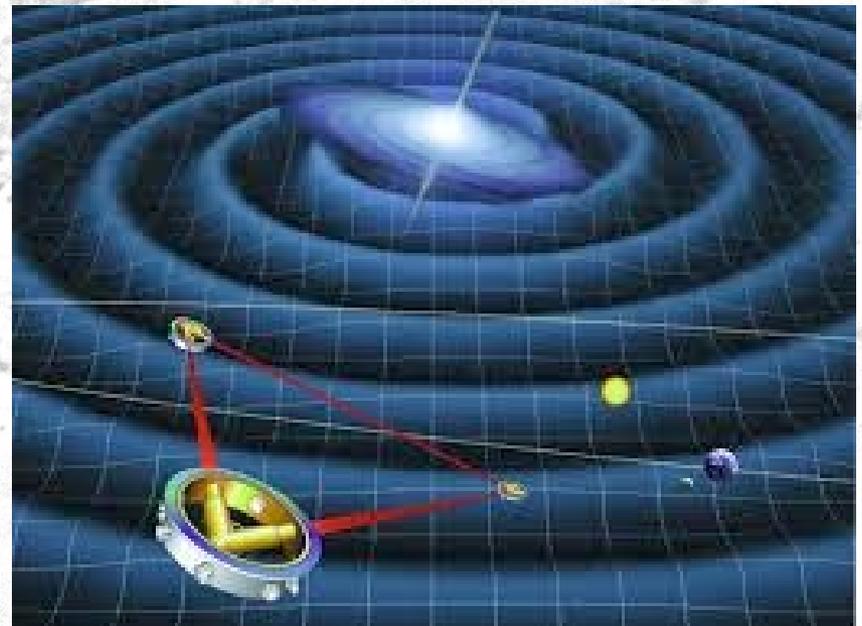
Es ist zu erwarten, dass diese in Experimenten nachgewiesen werden, bei denen Präzisionslaser die Entfernung von Millionen km zwischen Satelliten durchlaufen.

Störungen der Geometrie zwischen den Satelliten werden das Laserlicht ablenken und diese so nachgewiesen werden.

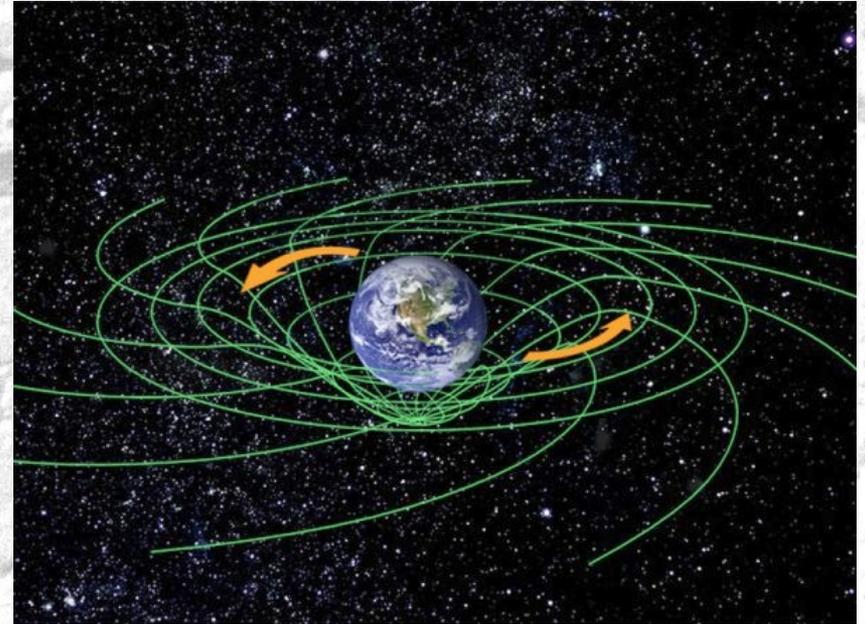
Gravitationswellen sind ein typischer Effekt der Allgemeinen Relativitätstheorie.



A binary system of compact massive objects rapidly orbiting each other produces ripples in spacetime.

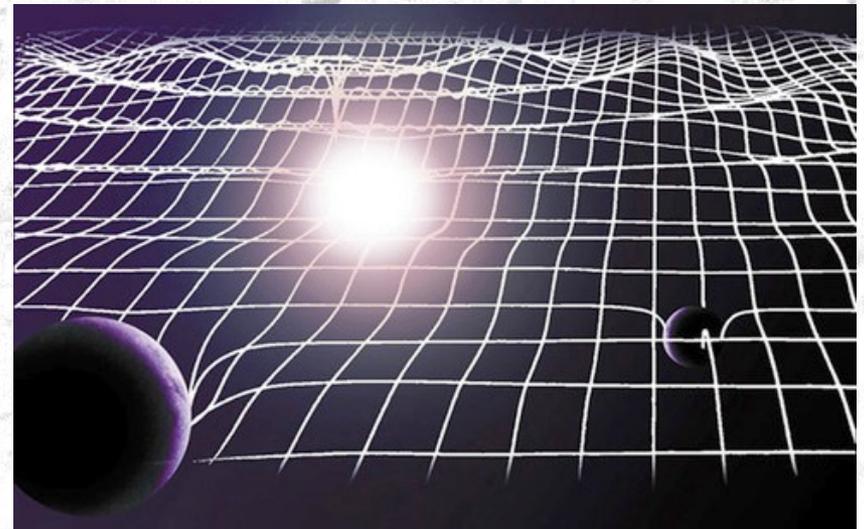
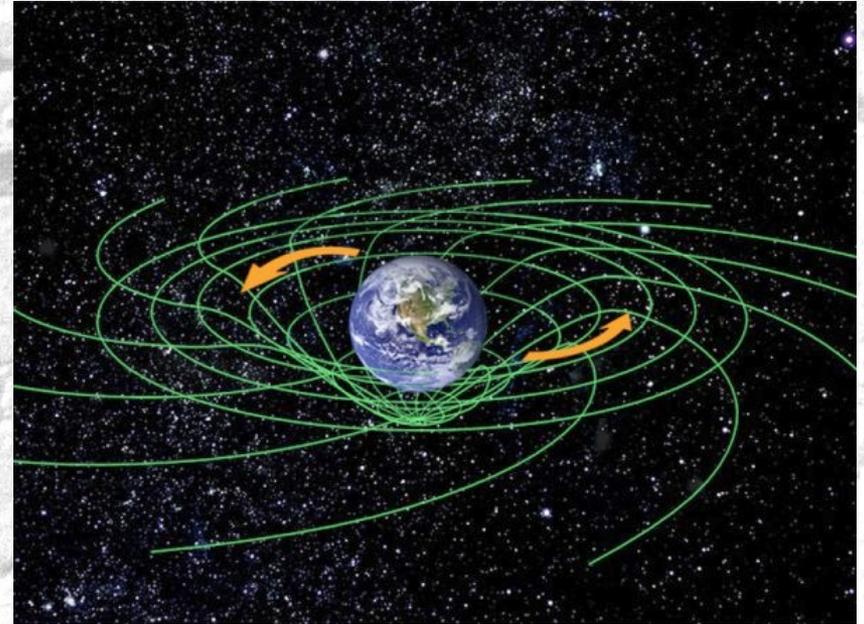


Ein massiver Körper deformiert nicht nur die Raum-Zeit, wenn er rotiert, zieht er die Raum-Zeit mit sich (frame dragging).



Ein massiver Körper deformiert nicht nur die Raum-Zeit, wenn er rotiert, zieht er die Raum-Zeit mit sich (frame dragging).

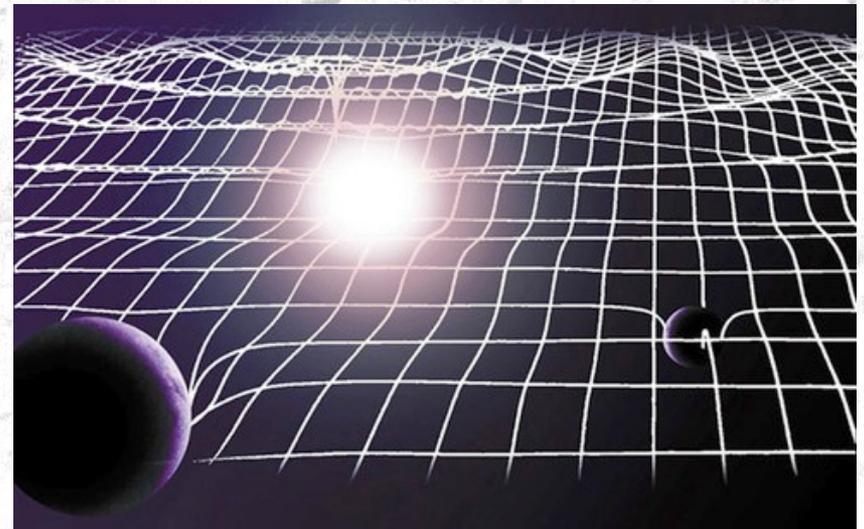
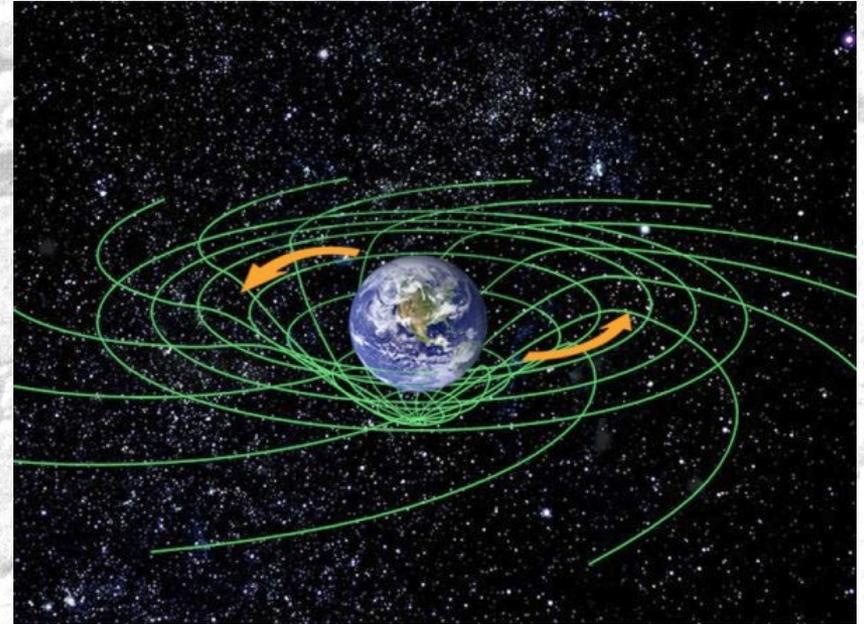
Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie erscheint die Raum-Zeit als dynamisches Objekt, nicht statisch wie der Newtonsche Raum.



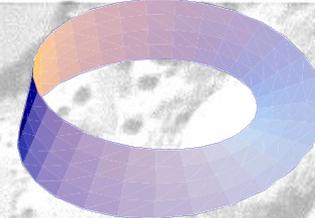
Ein massiver Körper deformiert nicht nur die Raum-Zeit, wenn er rotiert, zieht er die Raum-Zeit mit sich (frame dragging).

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie erscheint die Raum-Zeit als dynamisches Objekt, nicht statisch wie der Newtonsche Raum.

Die Raum-Zeit reagiert auf Massen und bestimmt Bewegungsbahnen.



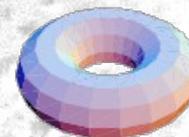
Die Raum-Zeit kann so gedacht werden als eine biegsame elastische "Mannigfaltigkeit" die durch die Anwesenheit von Masse und Energie deformiert wird.



sphere



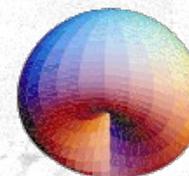
torus



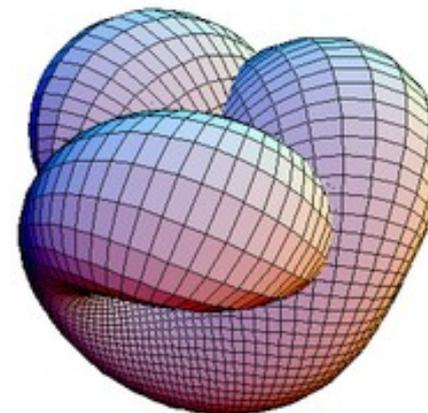
double torus



cross surface

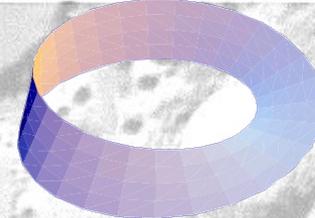


Klein bottle



Die Raum-Zeit kann so gedacht werden als eine biegsame elastische “Mannigfaltigkeit” die durch die Anwesenheit von Masse und Energie deformiert wird.

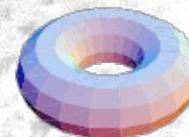
Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal, nahe an einem gegebenen Punkt, einen Euklidischen Raum approximiert.



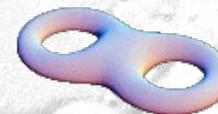
sphere



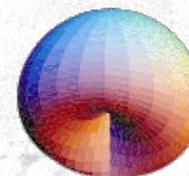
torus



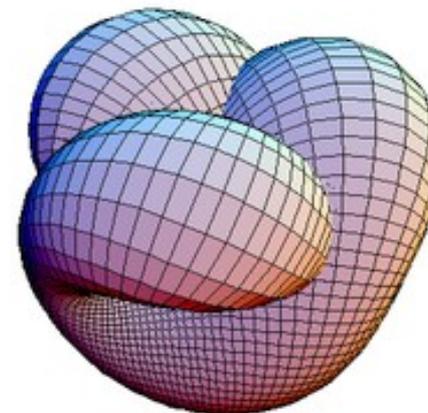
double torus



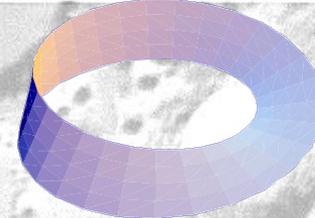
cross surface



Klein bottle

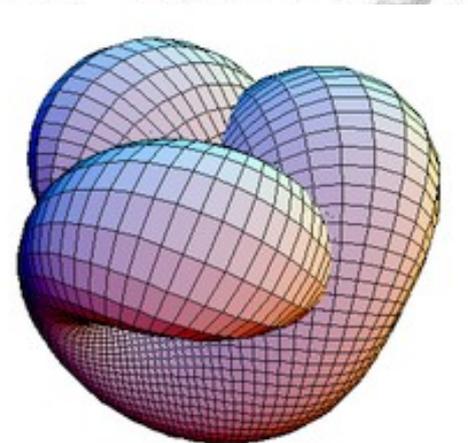
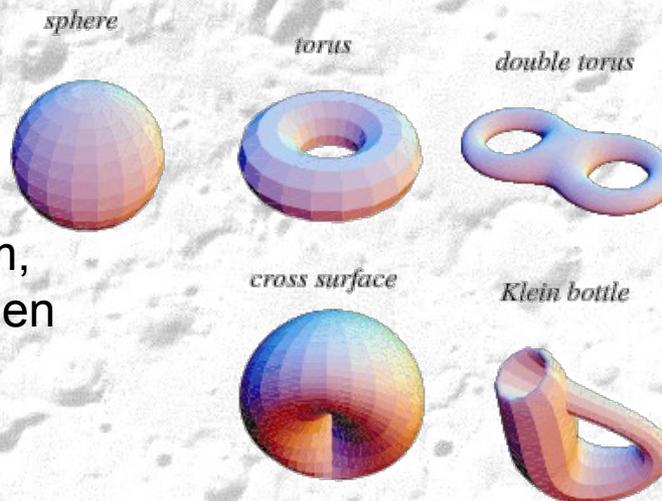


Die Raum-Zeit kann so gedacht werden als eine biegsame elastische “Mannigfaltigkeit” die durch die Anwesenheit von Masse und Energie deformiert wird.



Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal, nahe an einem gegebenen Punkt, einen Euklidischen Raum approximiert.

Lokal ist die Raum-Zeit flach, das ist ein Erfordernis des Äquivalenzprinzips.

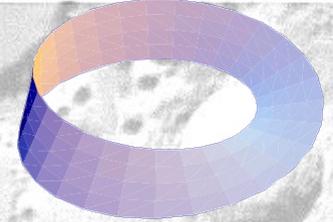


Die Raum-Zeit kann so gedacht werden als eine biegsame elastische “Mannigfaltigkeit” die durch die Anwesenheit von Masse und Energie deformiert wird.

Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal, nahe an einem gegebenen Punkt, einen Euklidischen Raum approximiert.

Lokal ist die Raum-Zeit flach, das ist ein Erfordernis des Äquivalenzprinzips.

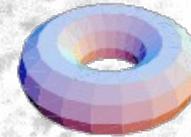
Global ist die Mannigfaltigkeit gekrümmt.



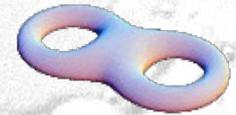
sphere



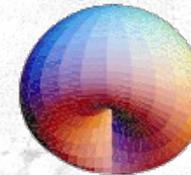
torus



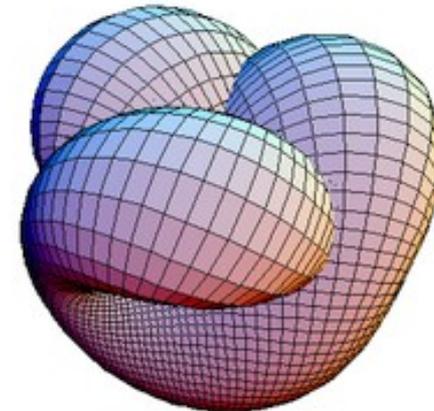
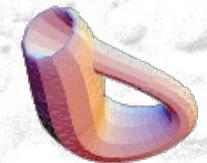
double torus



cross surface



Klein bottle



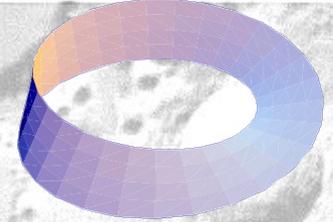
Die Raum-Zeit kann so gedacht werden als eine biegsame elastische “Mannigfaltigkeit” die durch die Anwesenheit von Masse und Energie deformiert wird.

Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal, nahe an einem gegebenen Punkt, einen Euklidischen Raum approximiert.

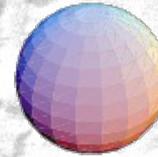
Lokal ist die Raum-Zeit flach, das ist ein Erfordernis des Äquivalenzprinzips.

Global ist die Mannigfaltigkeit gekrümmt.

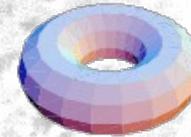
Das Wesen dieser Deformation definiert die “Geometrie”.



sphere



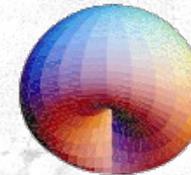
torus



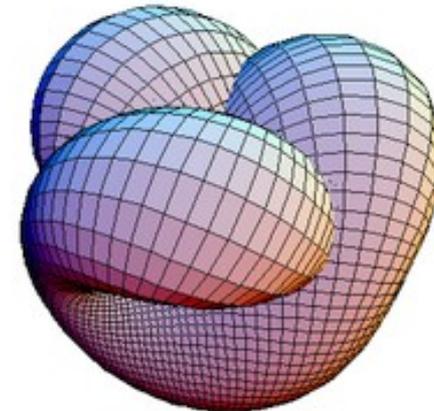
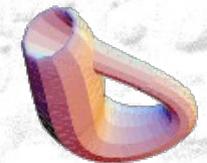
double torus

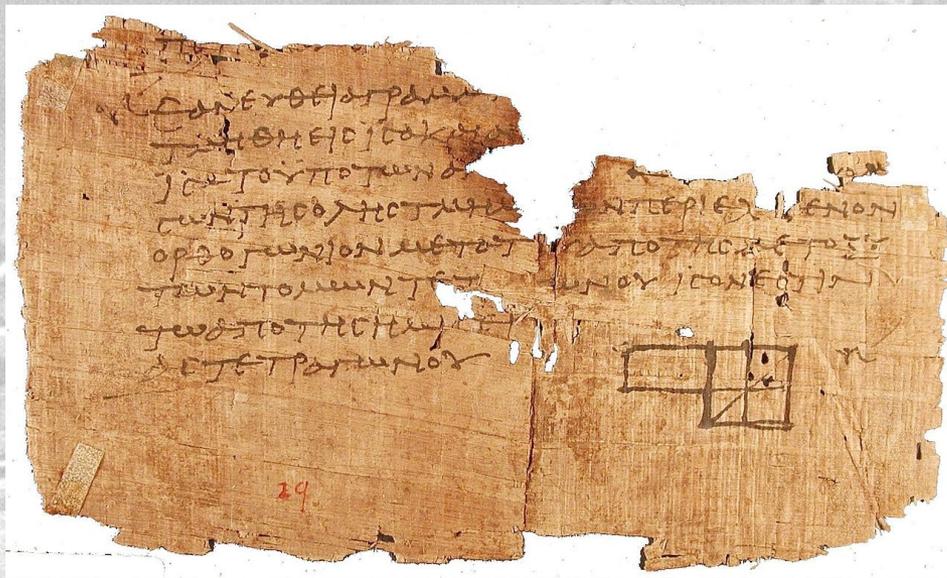


cross surface



Klein bottle





Oxyrhynchus Papyrus, 100AD



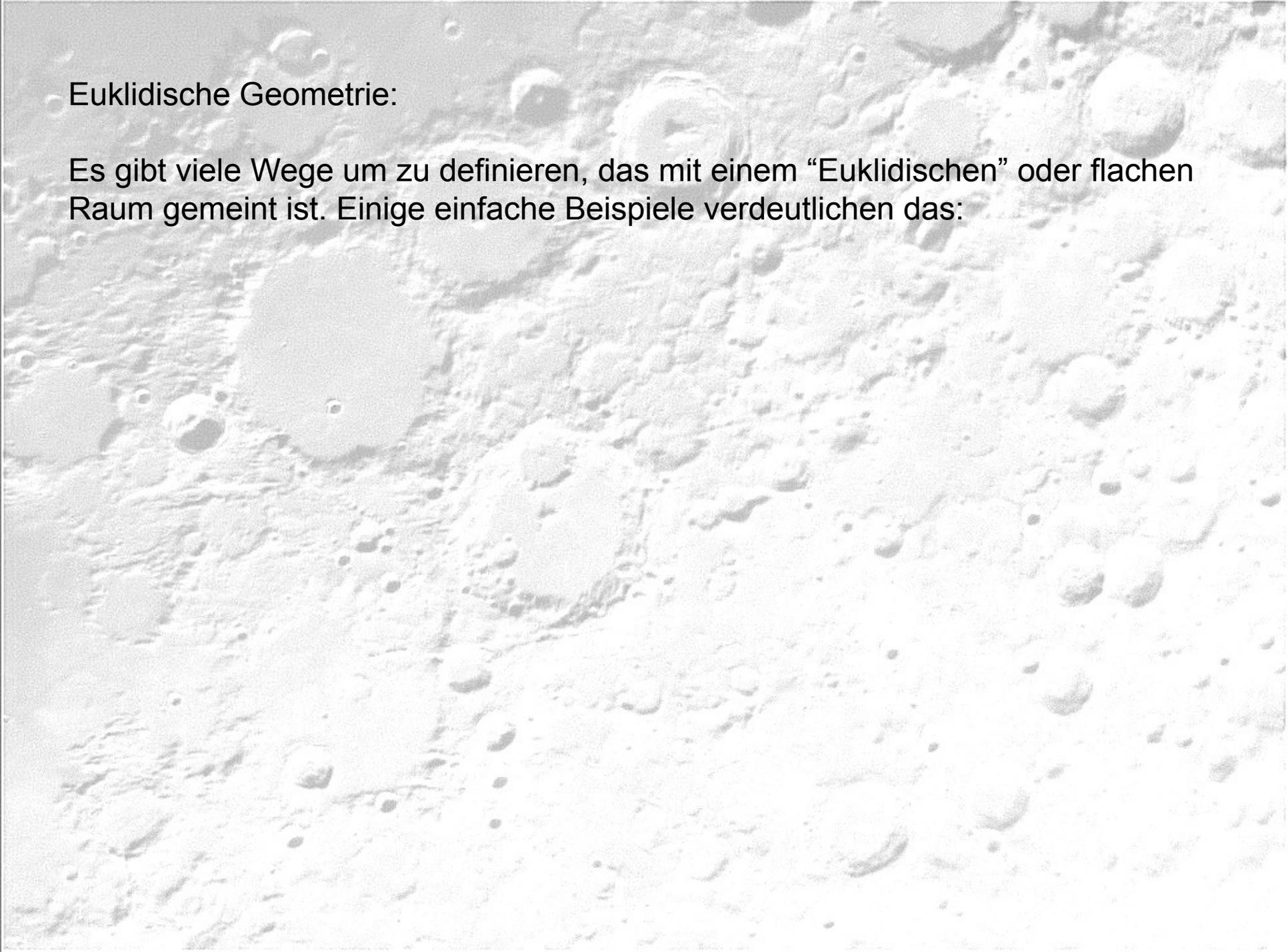
Euclid, 300 BC

Euklidische Geometrie ist alt – und intuitiv. Wir leben in einer Euclidischen Welt. Unsere Vorstellung sagt uns, dass der Raum “flach” ist wie eine Ebene.

Die Regeln von Euclid gelten überall.

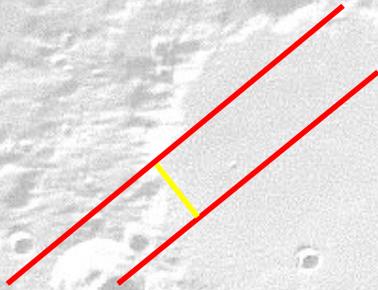
Euklidische Geometrie:

Es gibt viele Wege um zu definieren, was mit einem "Euklidischen" oder flachen Raum gemeint ist. Einige einfache Beispiele verdeutlichen das:



Euklidische Geometrie:

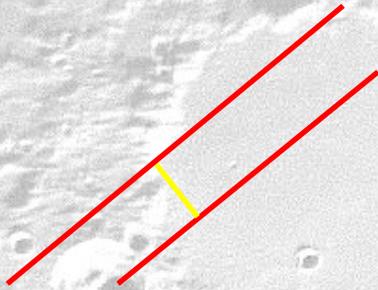
Es gibt viele Wege um zu definieren, was mit einem "Euklidischen" oder flachen Raum gemeint ist. Einige einfache Beispiele verdeutlichen das:



Parallele Geraden
bleiben parallel und
werden sich nie
schneiden.

Euclidische Geometrie:

Es gibt viele Wege um zu definieren, das mit einem "Euklidischen" oder flachen Raum gemeint ist. Einige einfache Beispiele verdeutlichen das:



Parallele Geraden
bleiben parallel und
werden sich nie
schneiden.

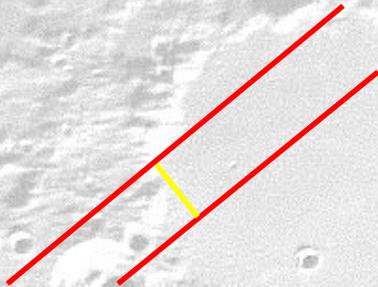


Geraden, die nicht
parallel sind, schneiden
sich einmal und nur
einmal

Winkel in einem Dreieck
summieren sich zu 180
Grad

Euclidische Geometrie:

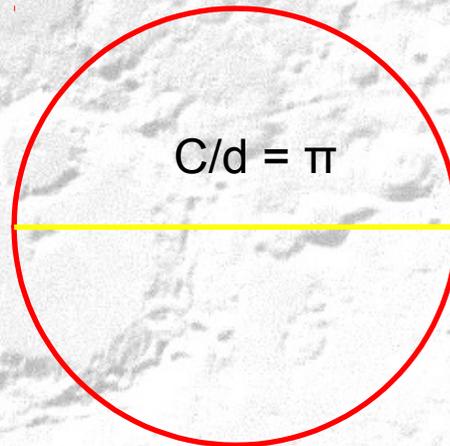
Es gibt viele Wege um zu definieren, was mit einem "Euklidischen" oder flachen Raum gemeint ist. Einige einfache Beispiele verdeutlichen das:



Parallele Geraden
bleiben parallel und
werden sich nie
schneiden.



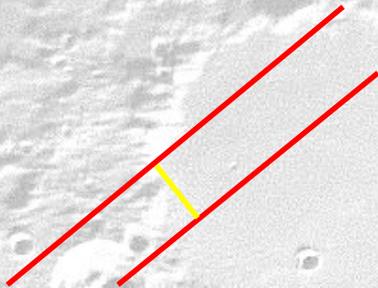
Geraden, die nicht
parallel sind, schneiden
sich einmal und nur
einmal



Das Verhältnis
zwischen Umfang und
Durchmesser eines
Kreises ist 3.14159 ...

Euclidische Geometrie:

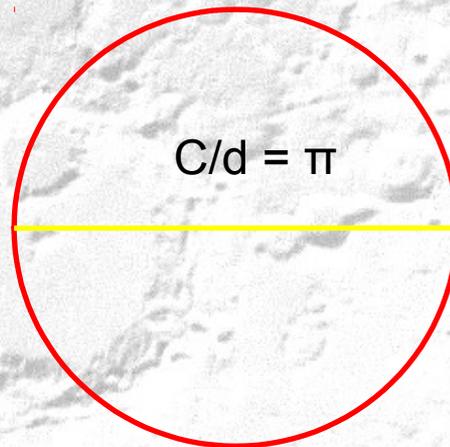
Es gibt viele Wege um zu definieren, was mit einem "Euklidischen" oder flachen Raum gemeint ist. Einige einfache Beispiele verdeutlichen das:



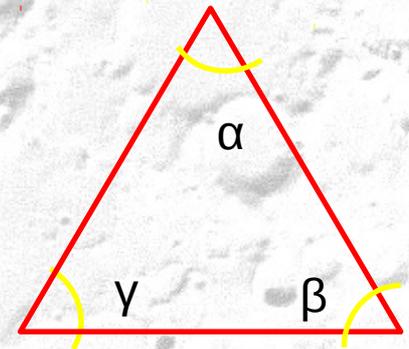
Parallele Geraden
bleiben parallel und
werden sich nie
schneiden.



Geraden, die nicht
parallel sind, schneiden
sich einmal und nur
einmal



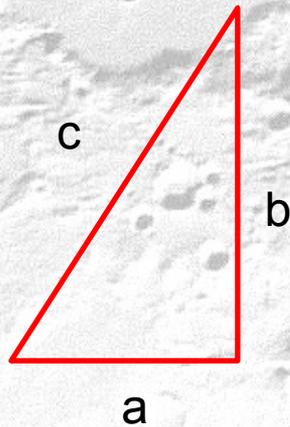
Das Verhältnis
zwischen Umfang und
Durchmesser eines
Kreises ist 3.14159 ...



Winkel in einem Dreieck
summieren sich zu 180
Grad

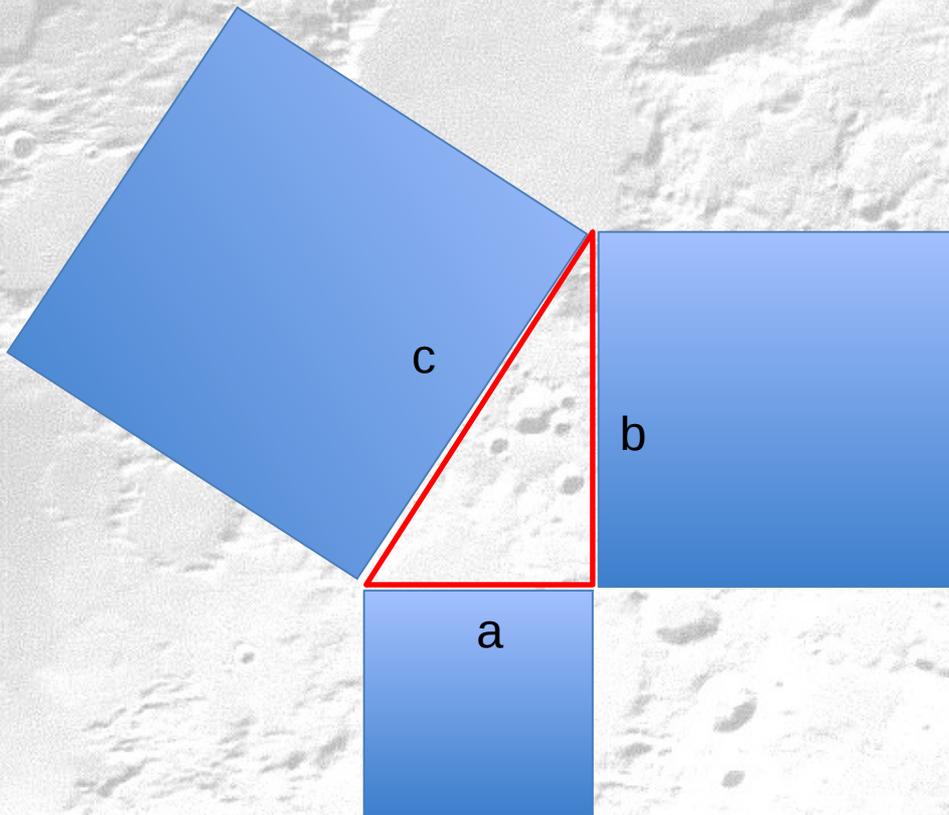
Eine von die beste Definition der Euclidische Geometrie ist
der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Eine von die beste Definition der Euclidische Geometrie ist
der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



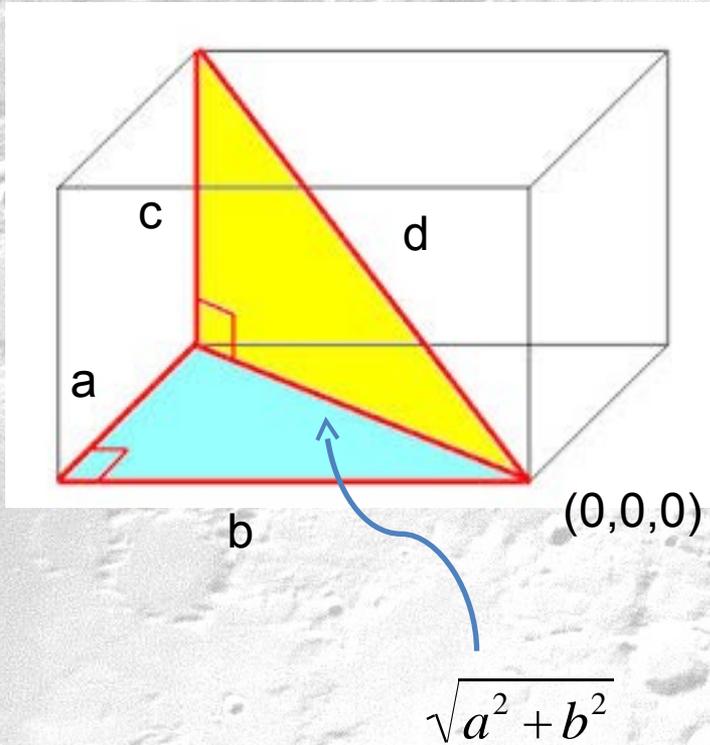
Er ist wichtig, denn er gibt uns die
mathematische Bedeutung einer
Distanz.

In 2-Dimensionen: $a^2 + b^2 = c^2$

In 3-Dimensionen: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2 = d^2$$

In n -Dimensionen: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = d^2$



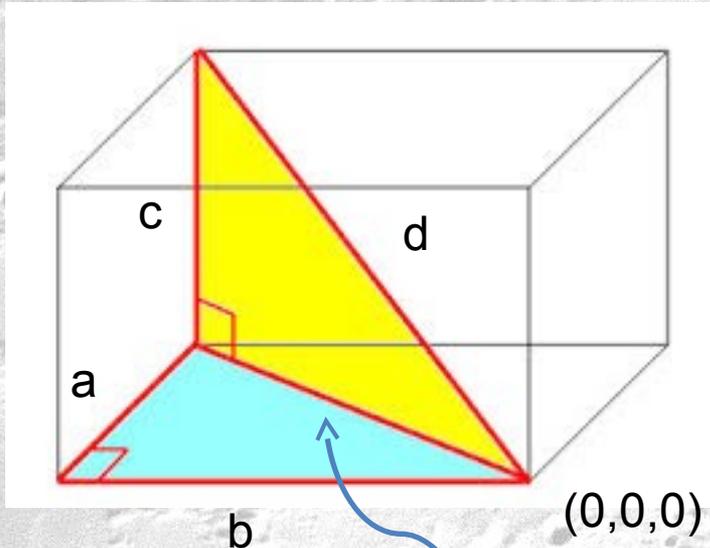
In 2-Dimensionen: $a^2+b^2=c^2$

In 3-Dimensionen: $a^2+b^2+c^2=d^2$

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2 = d^2$$

In n -Dimensionen: $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=d^2$

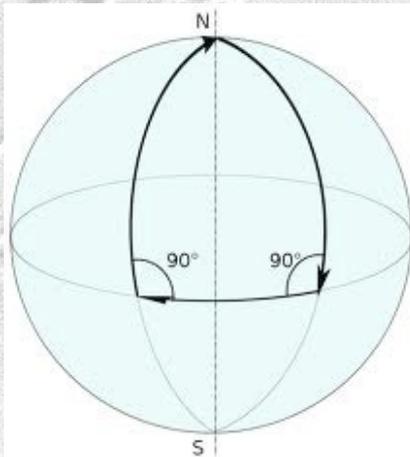
Fundamental ist dies Abstandsdefinition für den Euklidischen Raum.



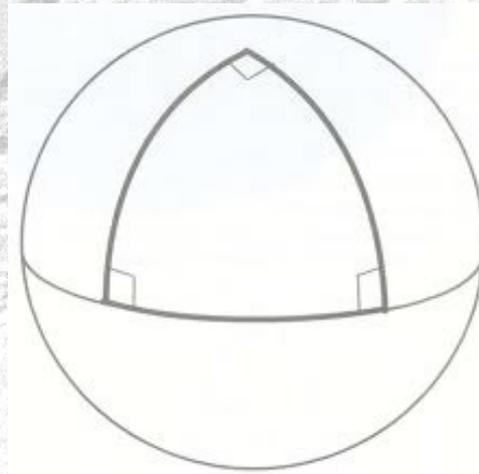
$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.

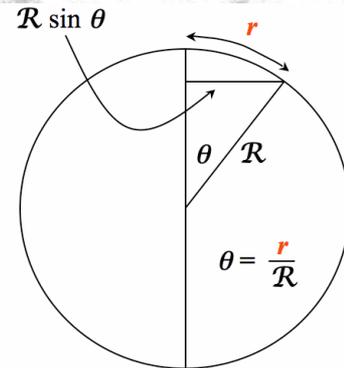
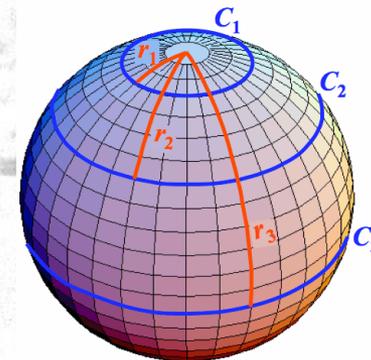
Zum Beispiel ist eine Kugeloberfläche ein "positiv" gekrümmter Raum



Parallele Linien am Equator schneiden sich an den Polen.



Die Summe der Dreiecks-Innenwinkel ist stets $> 180^\circ$

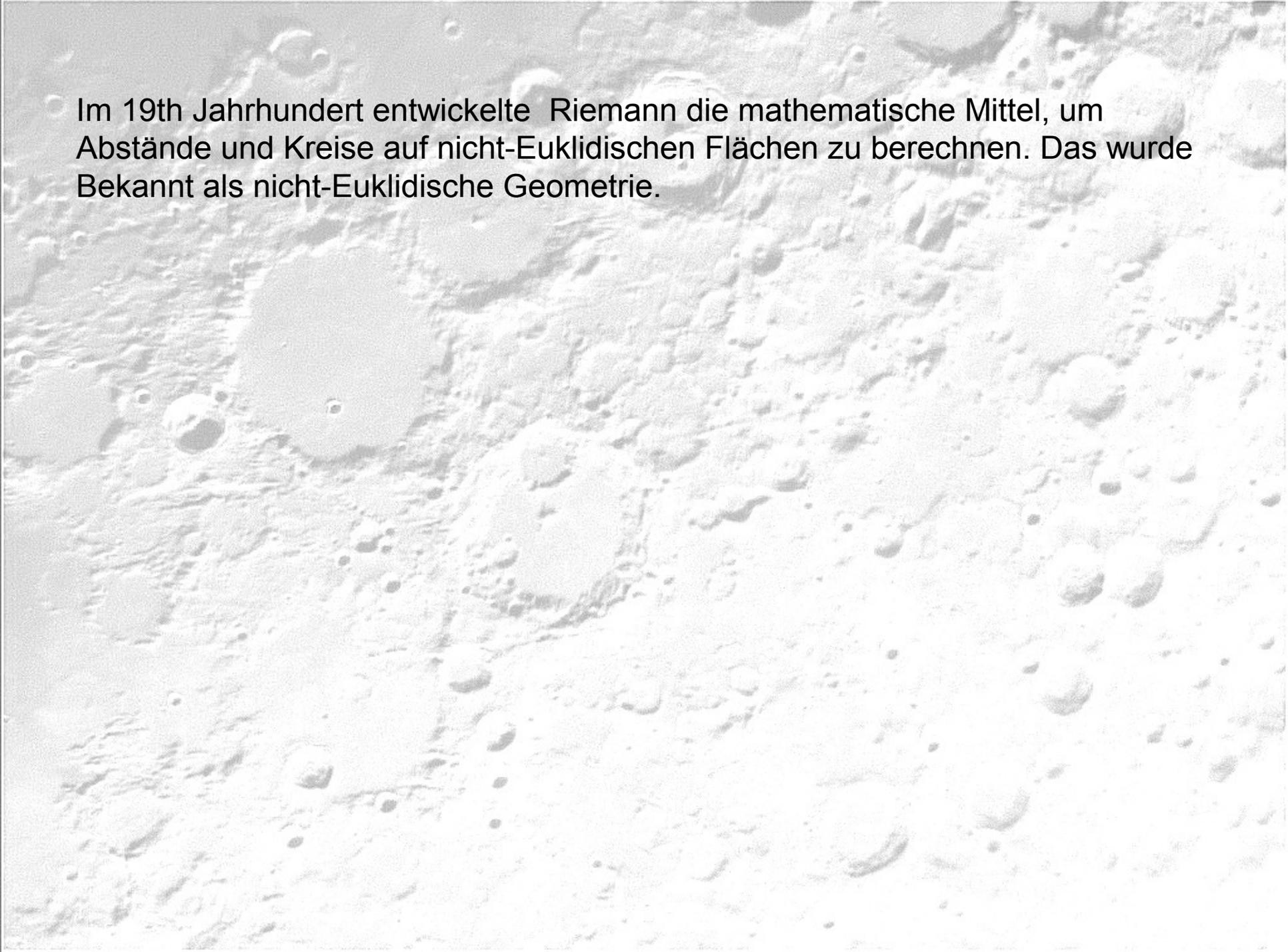


$$C = 2\pi R \sin \theta$$

$$C = 2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

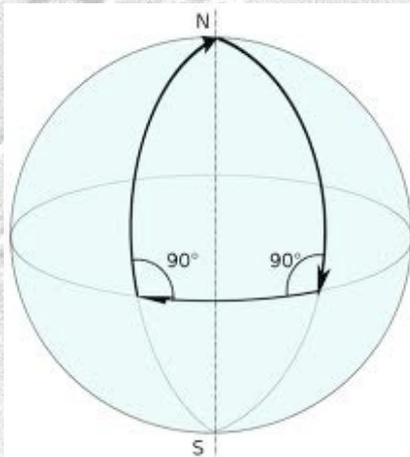
Der Kreisumfang ist $< 2\pi r$

Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde Bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.



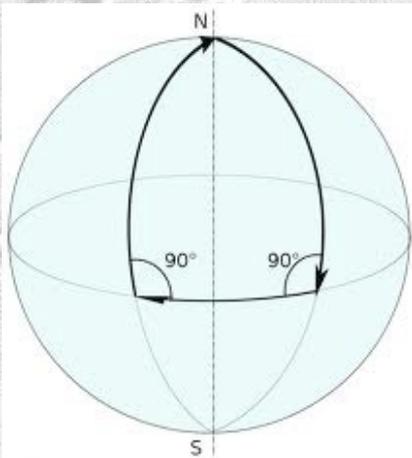
Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde Bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.

Zum Beispiel ist eine Kugeloberfläche ein "positiv" gekrümmter Raum



Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde Bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.

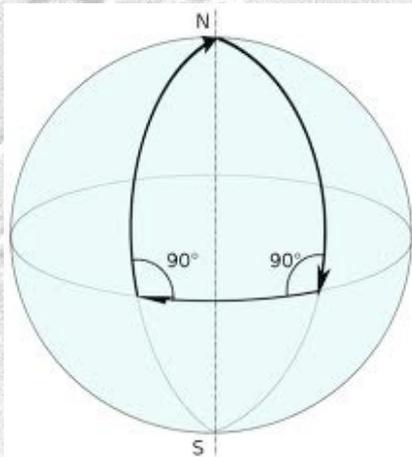
Zum Beispiel ist eine Kugeloberfläche ein "positiv" gekrümmter Raum



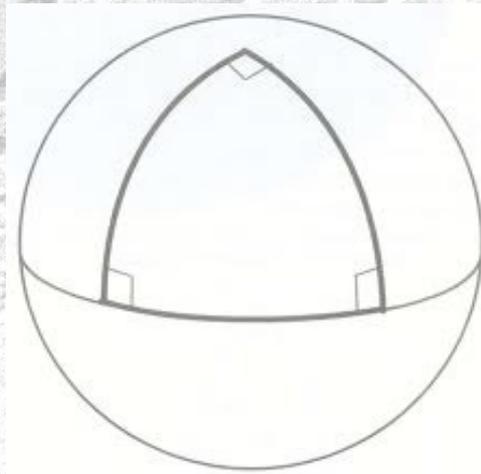
Parallele Linien
am Equator
schneiden sich an
den Polen.

Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde Bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.

Zum Beispiel ist eine Kugeloberfläche ein "positiv" gekrümmter Raum



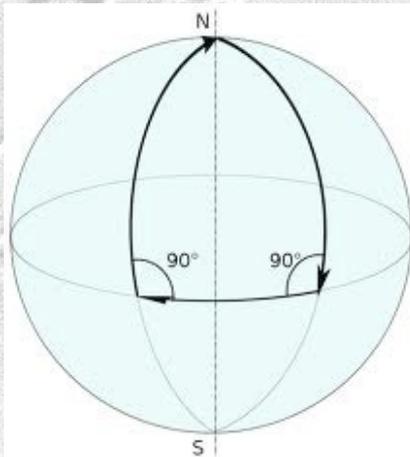
Parallele Linien
am Equator
schneiden sich an
den Polen.



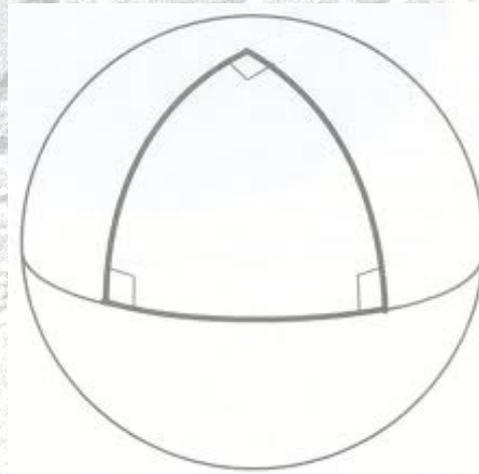
Die Summe der
Dreiecks-
Innenwinkel ist stets
> 180°

Im 19th Jahrhundert entwickelte Riemann die mathematische Mittel, um Abstände und Kreise auf nicht-Euklidischen Flächen zu berechnen. Das wurde Bekannt als nicht-Euklidische Geometrie.

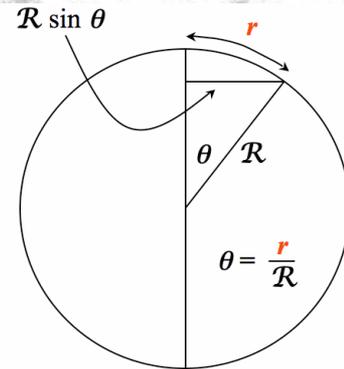
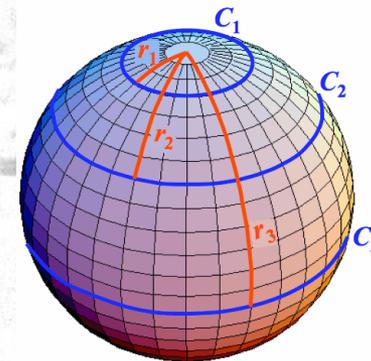
Zum Beispiel ist eine Kugeloberfläche ein "positiv" gekrümmter Raum



Parallele Linien am Equator schneiden sich an den Polen.



Die Summe der Dreiecks-Innenwinkel ist stets $> 180^\circ$

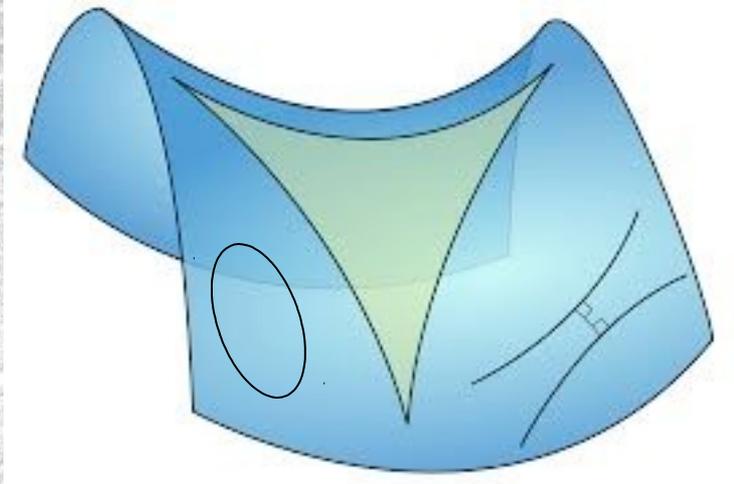


$$C = 2\pi R \sin \theta$$

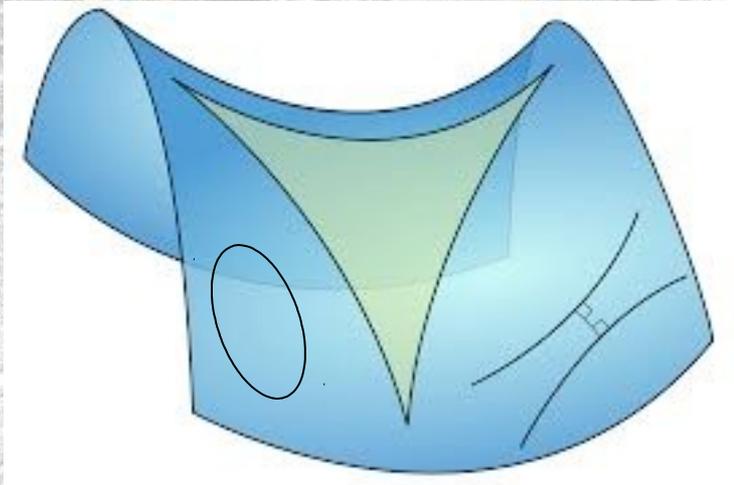
$$C = 2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

Der Kreisumfang ist $< 2\pi r$

Eine ähnliche Situation stellt eine Sattelfläche dar, bekannt als ein
“negativ” gekrümmter Raum

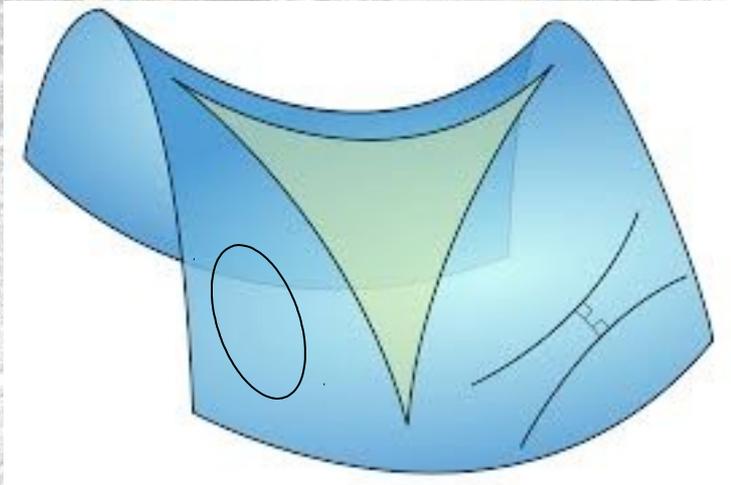


Eine ähnliche Situation stellt eine Sattelfläche dar, bekannt als ein “negativ” gekrümmter Raum



Parallele Linien divergieren

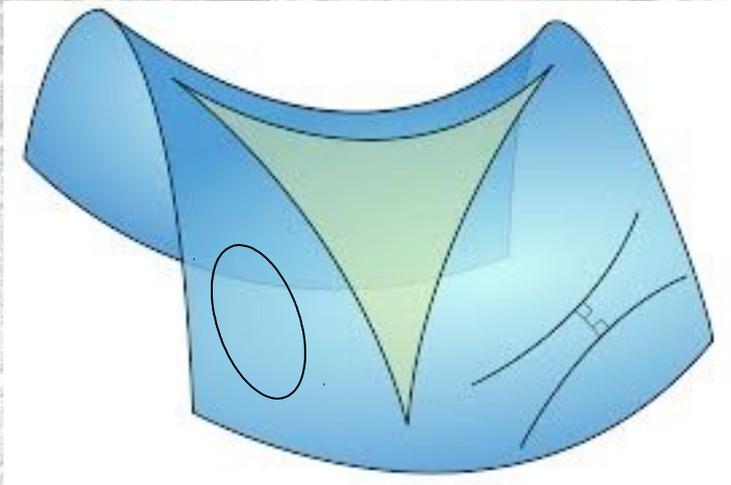
Eine ähnliche Situation stellt eine Sattelfläche dar, bekannt als ein “negativ” gekrümmter Raum



Parallele Linien divergieren

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks sind < 180

Eine ähnliche Situation stellt eine Sattelfläche dar, bekannt als ein “negativ” gekrümmter Raum

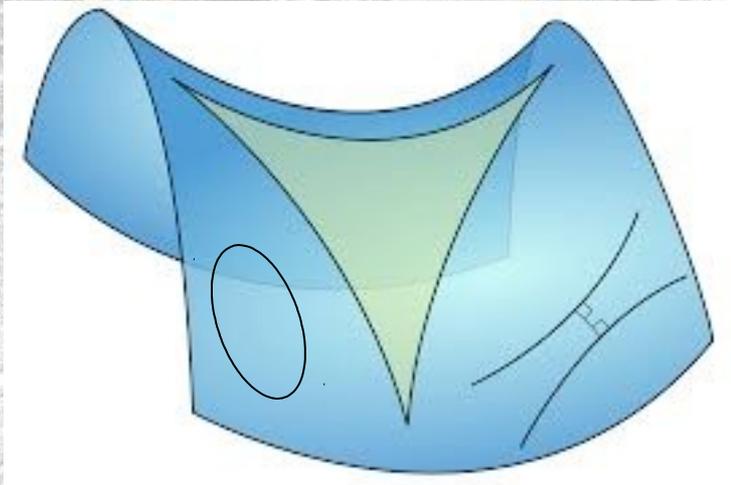


Parallele Linien divergieren

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks sind < 180

Der Umfang eines Kreises $> 2\pi r$

Eine ähnliche Situation stellt eine Sattelfläche dar, bekannt als ein “negativ” gekrümmter Raum



Parallele Linien divergieren

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks sind < 180

Der Umfang eines Kreises $> 2\pi r$

Die Art der Krümmung eines Körpers ist gegeben durch die Relation von Dreiecken, Kreisen und Linien relativ zur Euklidischen Geometrie.

Da wir immer suggeriert haben, dass Licht und frei-fallende Körper stets dem kürzesten Weg (Weg des geringsten Widerstandes) folgen, können Distanzen und der Satz des Pythagoras benutzt werden, um die Geometrie einer Mannigfaltigkeit zu charakterisieren.

z.B.

$$ds = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Da wir immer suggeriert haben, dass Licht und frei-fallende Körper stets dem kürzesten Weg (Weg des geringsten Widerstandes) folgen, können Distanzen und der Satz des Pythagoras benutzt werden, um die Geometrie einer Mannigfaltigkeit zu charakterisieren.

z.B.

$$ds = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Aber wie sieht der Satz des Pythagoras in einer nicht-Euklidischen Geometrie aus?

Bevor wir Entfernungsmaße in nicht-Euklidischen Räumen angeben, betrachten wir nicht-kartesische Koordinaten:



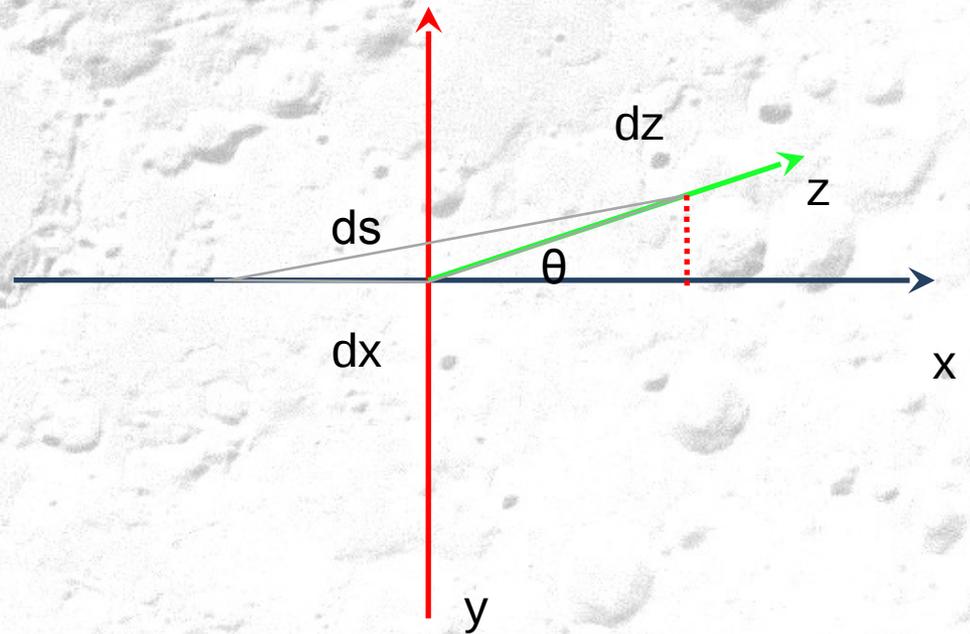


Bevor wir Entfernungsmaße in nicht-Euklidischen Räumen angeben, betrachten wir nicht-karthesische Koordinaten:

In karthesischen Kordinaten ist die Länge eine Linie gegeben durch
 $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Bevor wir Entfernungsmaße in nicht-Euklidischen Räumen angeben, betrachten wir nicht-kartesische Koordinaten:

In kartesischen Koordinaten ist die Länge einer Linie gegeben durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$

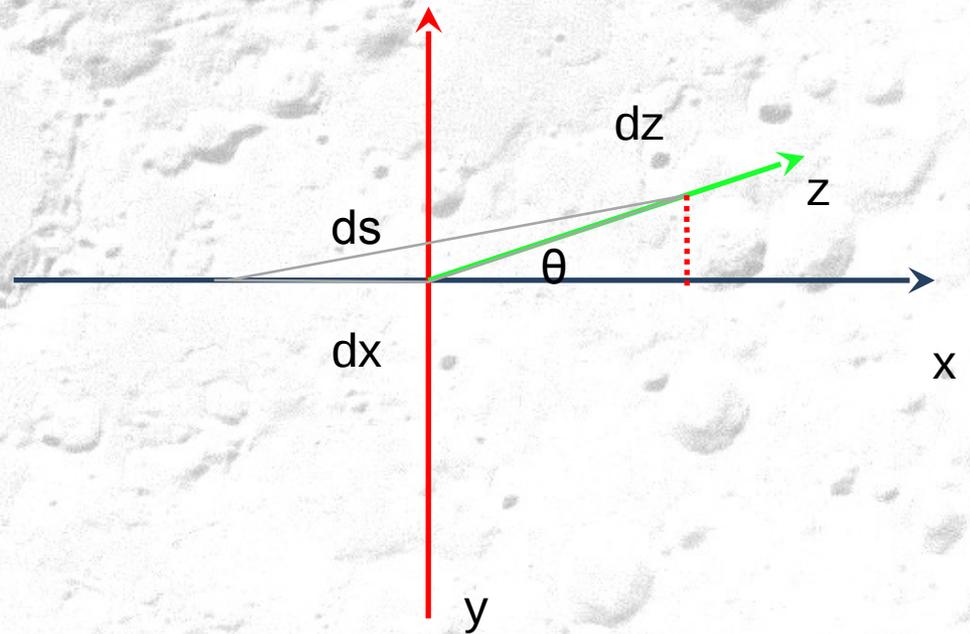


Bevor wir Entfernungsmaße in nicht-Euklidischen Räumen angeben, betrachten wir nicht-karthesische Koordinaten:

In karthesischen Koordinaten ist die Länge einer Linie gegeben durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Wenn wir Koordinaten x und eine nicht-orthogonale Koordinate z wählen, gilt in den neuen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + 2dx dz \cos \theta$$



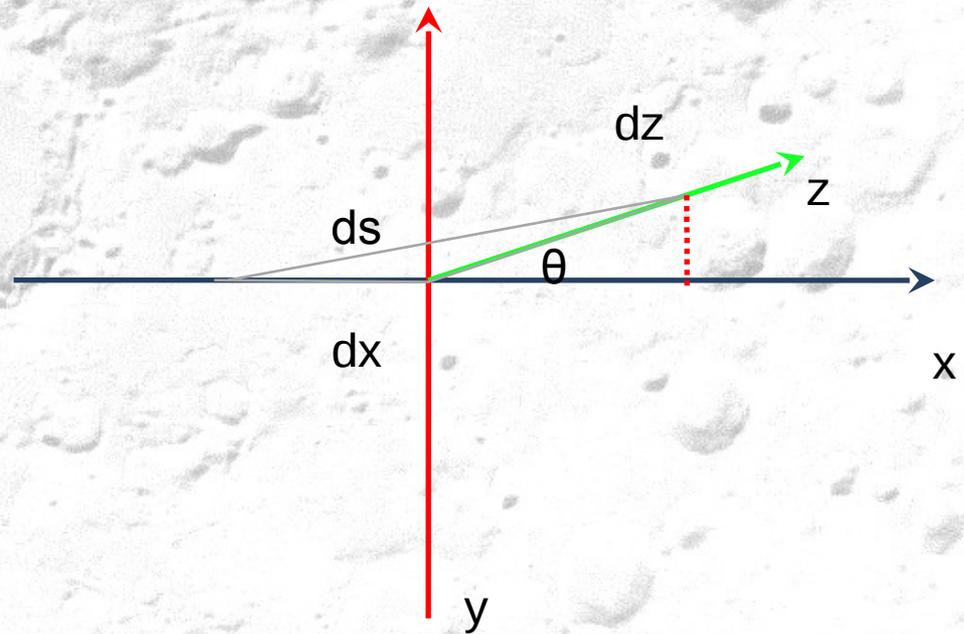
Bevor wir Entfernungsmaße in nicht-Euklidischen Räumen angeben, betrachten wir nicht-karthesische Koordinaten:

In karthesischen Koordinaten ist die Länge einer Linie gegeben durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Wenn wir Koordinaten x und eine nicht-orthogonale Koordinate z wählen, gilt in den neuen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + 2dx dz \cos \theta$$

Die Winkel-Information ist gespeichert in $dx dz$: einem "Kreuzterm"

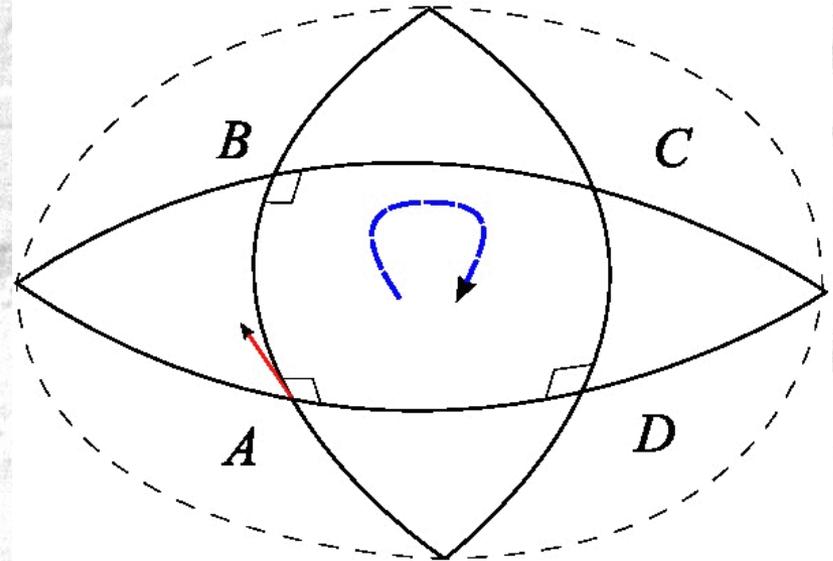


Die Krümmung einer Mannigfaltigkeit kann gemessen werden durch den Transport eines Tangentialvektors um einen Weg definiert durch Großkreise:



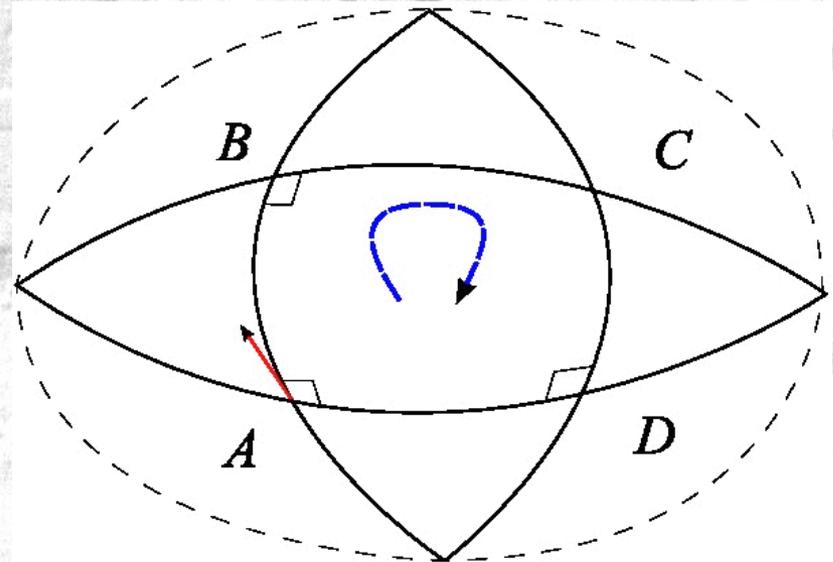
Die Krümmung einer Mannigfaltigkeit kann gemessen werden durch den Transport eines Tangentialvektors um einen Weg definiert durch Großkreise:

Die Animation zeigt, wie der Vektor nach der Umkreisung einer Zelle aussieht.

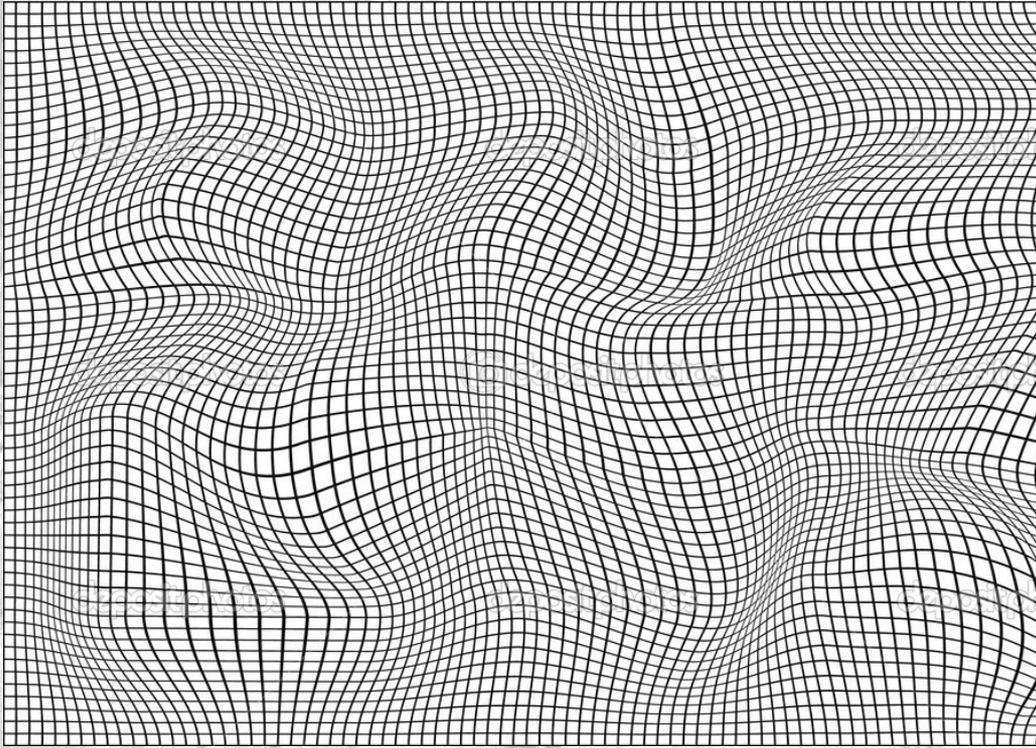


Die Krümmung einer Mannigfaltigkeit kann gemessen werden durch den Transport eines Tangentialvektors um einen Weg definiert durch Großkreise:

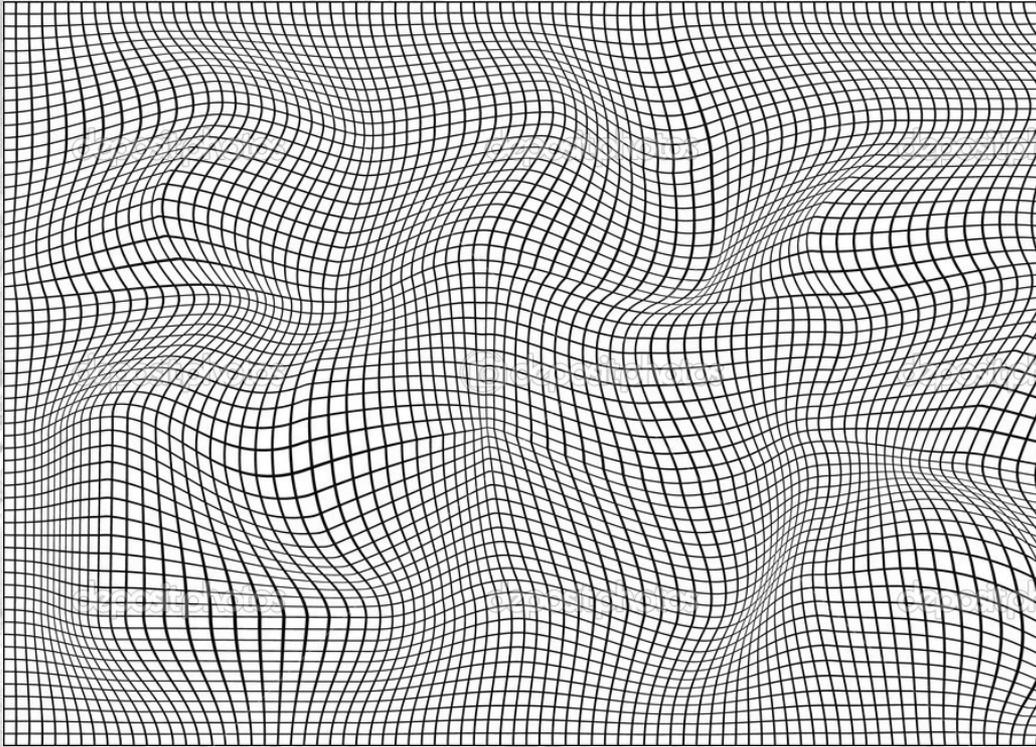
Die Animation zeigt, wie der Vektor nach der Umkreisung einer Zelle aussieht.



Der Transport führt zu zwei verschiedenen Vektoren. Das ist eine Eigenschaft einer gekrümmten Mannigfaltigkeit. Ein "metrischer Tensor (wie auch der Riemann-Tensor) erfasst die Eigenschaften der Krümmung.



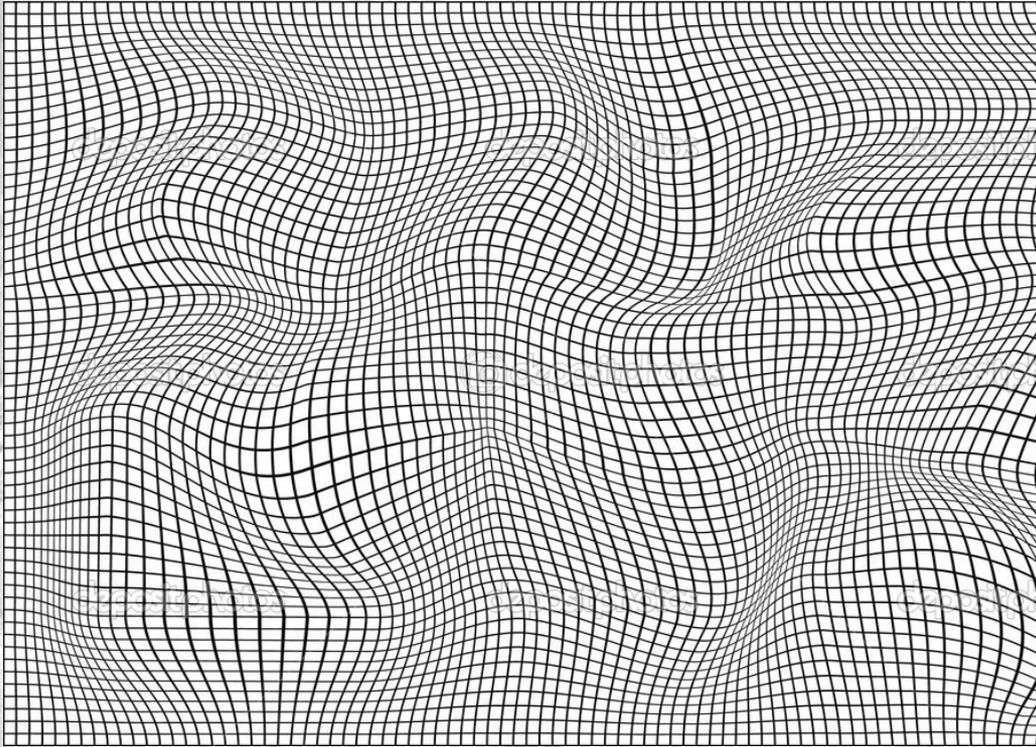
Im Allgemeinen wird der Betrag und die Art der Deformation der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt durch eine Metrik mit all ihren "Kreuz-Termen" angegeben.



Im Allgemeinen wird der Betrag und die Art der Deformation der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt durch eine Metrik mit all ihren "Kreuz-Termen" angegeben.

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds \cdot ds \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot dx^i) \cdot (\mathbf{e}_j \cdot dx^j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dx^i dx^j \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

wo $i, j = x, y$



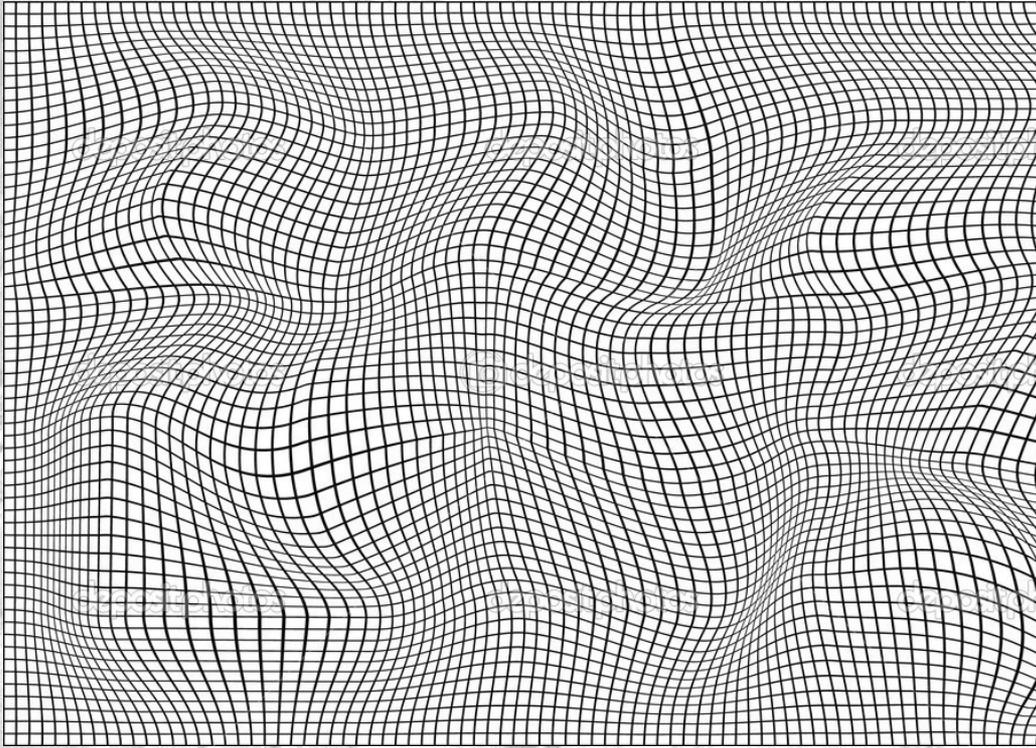
Im Allgemeinen wird der Betrag und die Art der Deformation der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt durch eine Metrik mit all ihren "Kreuz-Termen" angegeben.

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds \cdot ds \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot dx^i) \cdot (\mathbf{e}_j \cdot dx^j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dx^i dx^j \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

wo $i, j = x, y$

Gekrümmter Raum in beliebigen Korinaten

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$



Im Allgemeinen wird der Betrag und die Art der Deformation der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt durch eine Metrik mit all ihren "Kreuz-Termen" angegeben.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= ds \cdot ds \\
 &= (\mathbf{e}_i \cdot dx^i) \cdot (\mathbf{e}_j \cdot dx^j) \\
 &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dx^i dx^j \\
 &= g_{ij} dx^i dx^j
 \end{aligned}$$

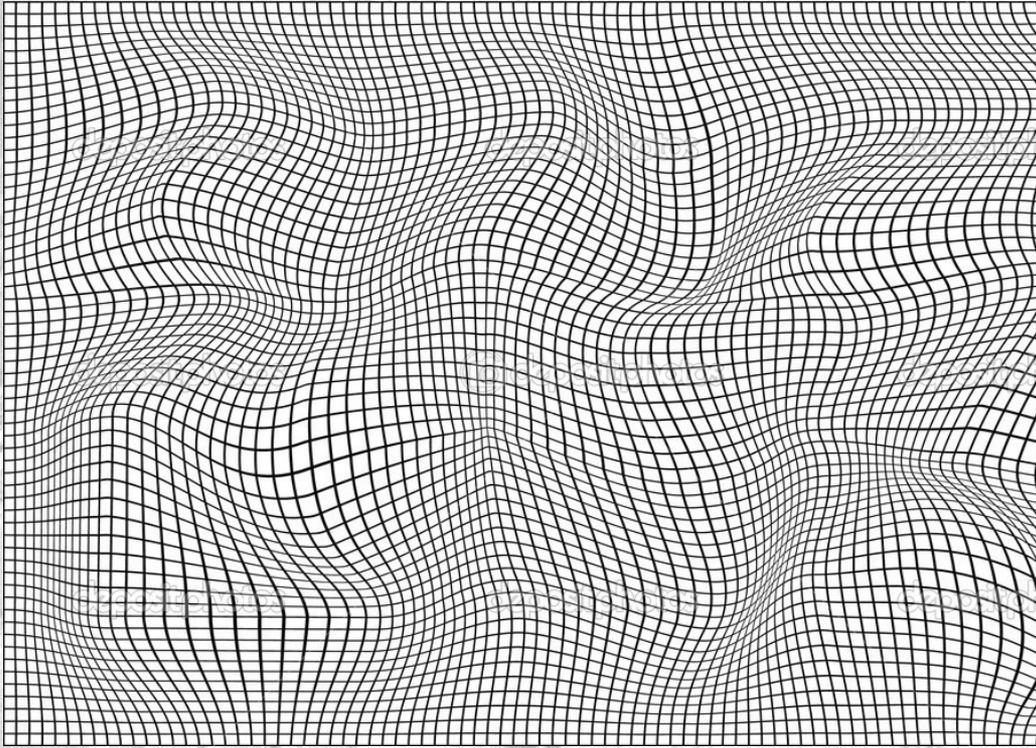
wo $i, j = x, y$

Euklidische Raum in
karthesischen Koordinaten

$$g_{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ 1 & a = b \end{cases}$$

Gekrümmter Raum in beliebigen Korinaten

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$



Im Allgemeinen wird der Betrag und die Art der Deformation der Mannigfaltigkeit an jedem Punkt durch eine Metrik mit all ihren "Kreuz-Termen" angegeben.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= ds \cdot ds \\
 &= (\mathbf{e}_i \cdot dx^i) \cdot (\mathbf{e}_j \cdot dx^j) \\
 &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dx^i dx^j \\
 &= g_{ij} dx^i dx^j
 \end{aligned}$$

wo $i, j = x, y$

Euklidische Raum in
karthesischen Koordinaten

$$g_{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ 1 & a = b \end{cases}$$

Gekrümmter Raum in beliebigen Korinaten

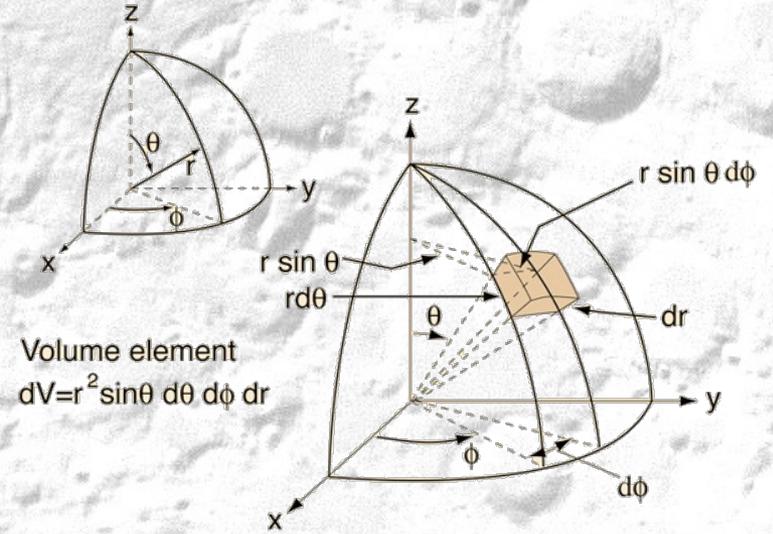
$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{yy} dy dy$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

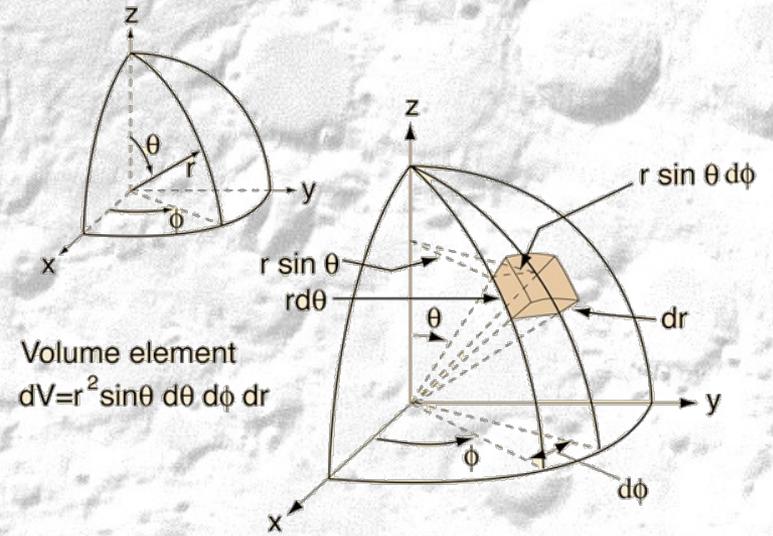


Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

Ein Schritt in r -Richtung ist quantifiziert durch

$$ds_r = dr \text{ und so } ds_r^2 = dr^2$$



Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

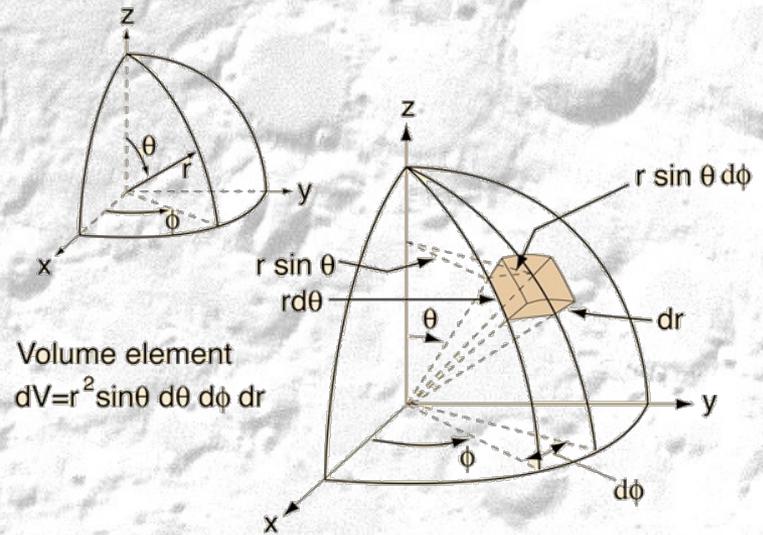
Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

Ein Schritt in r -Richtung ist quantifiziert durch

$$ds_r = dr \text{ und so } ds_r^2 = dr^2$$

Bei gegebenen r ist ein Schritt in θ -Richtung gegeben durch by

$$ds_\theta = r d\theta \text{ und so } ds_\theta^2 = r^2 d\theta^2$$



Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

Ein Schritt in r -Richtung ist quantifiziert durch

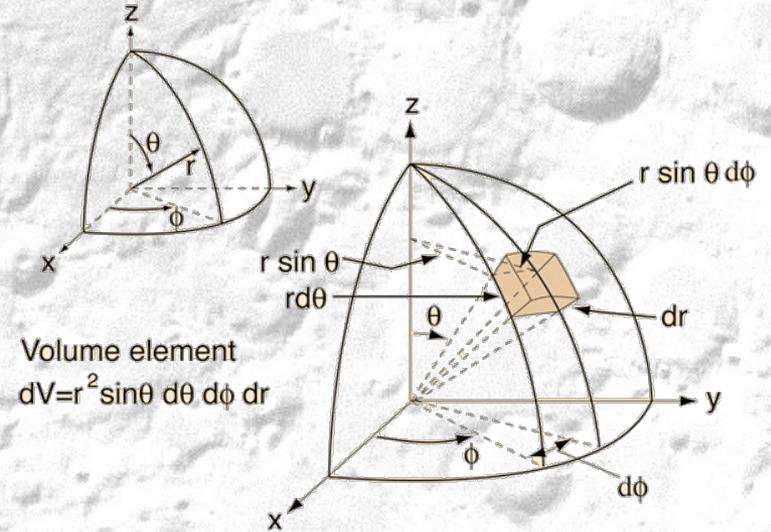
$$ds_r = dr \quad \text{und so} \quad ds_r^2 = dr^2$$

Bei gegebenen r ist ein Schritt in θ -Richtung gegeben durch

$$ds_\theta = r d\theta \quad \text{und so} \quad ds_\theta^2 = r^2 d\theta^2$$

bei fixem r und θ ist ein Schritt in the ϕ Richtung gegeben durch

$$ds_\phi = r \sin\theta d\phi \quad \text{und so} \quad ds_\phi^2 = r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$



Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

Ein Schritt in r -Richtung ist quantifiziert durch

$$ds_r = dr \text{ und so } ds_r^2 = dr^2$$

Bei gegebenen r ist ein Schritt in θ -Richtung gegeben durch

$$ds_\theta = r d\theta \text{ und so } ds_\theta^2 = r^2 d\theta^2$$

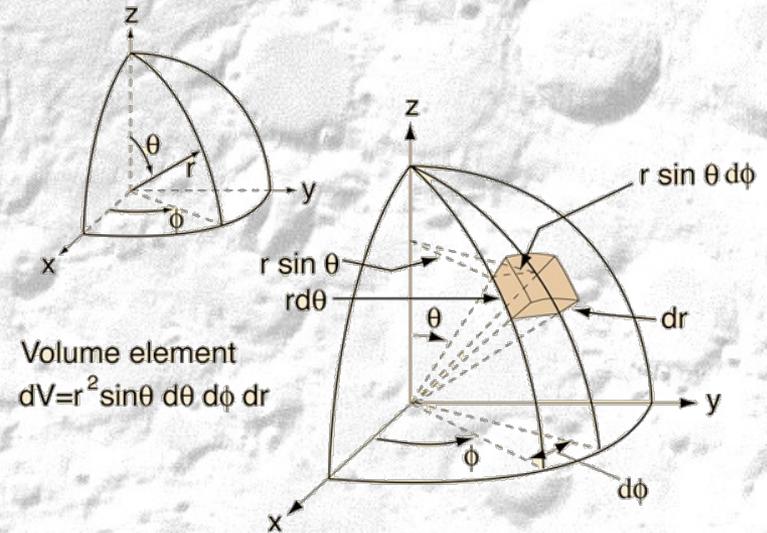
bei fixem r und θ ist ein Schritt in the ϕ Richtung gegeben durch

$$ds_\phi = r \sin\theta d\phi \text{ und so } ds_\phi^2 = r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Die Metrik ist so

$$ds^2 = ds_r^2 + ds_\theta^2 + ds_\phi^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$



Was ist die Metrik eine Kugeloberfläche?

Nehme Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

Ein Schritt in r -Richtung ist quantifiziert durch

$$ds_r = dr \text{ und so } ds_r^2 = dr^2$$

Bei gegebenen r ist ein Schritt in θ -Richtung gegeben durch

$$ds_\theta = r d\theta \text{ und so } ds_\theta^2 = r^2 d\theta^2$$

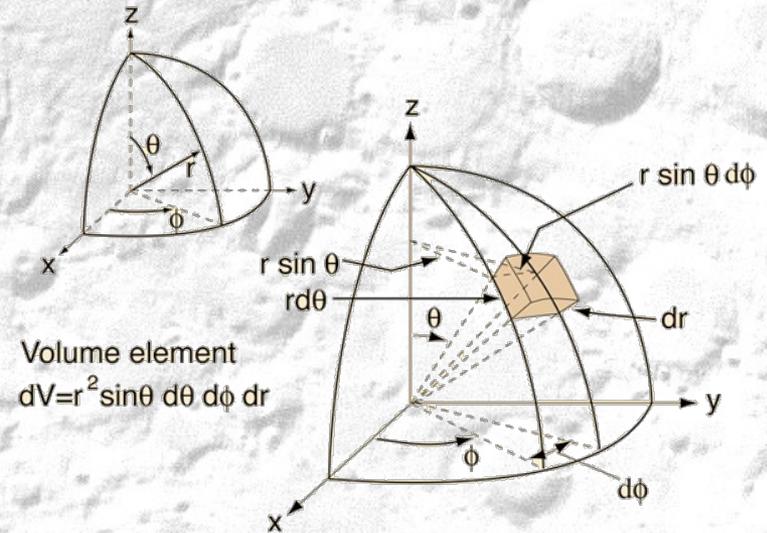
bei fixem r und θ ist ein Schritt in the ϕ Richtung gegeben durch

$$ds_\phi = r \sin\theta d\phi \text{ und so } ds_\phi^2 = r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Die Metrik ist so

$$ds^2 = ds_r^2 + ds_\theta^2 + ds_\phi^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$



$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Andere Arte for Metrik:

Schwarzschild Metrik (Schwarzes Loch)

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

Kerr-Metrik (spinning black hole)

$$c^2 d\tau^2 = \left(g_{tt} - \frac{g_{t\phi}^2}{g_{\phi\phi}}\right) dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} \left(d\phi + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} dt\right)^2.$$

Fiedman-Robertson-Walker Metrik (Für das Universum)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right).$$



Krümmung = Schwerkraft



Das Äquivalenzprinzip war “Einstein’s glücklichste Idee” denn es schließt den Weg ein, was Gravitation ausmacht. Die ganze Allgemeine Relativitätstheorie folgt daraus.

Krümmung = Schwerkraft



Das Äquivalenzprinzip war “Einstein’s glücklichste Idee” denn es schließt den Weg ein, was Gravitation ausmacht. Die ganze Allgemeine Relativitätstheorie folgt daraus.

Das Äquivalenzprinzip impliziert, dass Schwerkraft als Krümmung der (andererseits flachen) Raum-Zeit beschrieben werden kann.

Krümmung = Schwerkraft

Das Äquivalenzprinzip war “Einstein’s glücklichste Idee” denn es schließt den Weg ein, was Gravitation ausmacht. Die ganze Allgemeine Relativitätstheorie folgt daraus.

Das Äquivalenzprinzip impliziert, dass Schwerkraft als Krümmung der (andererseits flachen) Raum-Zeit beschrieben werden kann.

Krümmung = Schwerkraft

oder, korrekt geschrieben

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}$$

Das Äquivalenzprinzip war “Einstein’s glücklichste Idee” denn es schließt den Weg ein, was Gravitation ausmacht. Die ganze Allgemeine Relativitätstheorie folgt daraus.

Das Äquivalenzprinzip impliziert, dass Schwerkraft als Krümmung der (andererseits flachen) Raum-Zeit beschrieben werden kann.

Krümmung = Schwerkraft

oder, korrekt geschrieben

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}$$

Das sind die Einsteinschen Feldgleichungen, die beschreiben, wie die Krümmung und die Masse bzw. Energie sich zueinander verhalten.

Mathematik fachbuch, 1890

118 119

Erster Beweis.
 2. Zum rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.
Satz. $a^2 = b^2 + c^2$
 Weiter (Satzbilder) Beweis. (Züge von 1. erster Beweis.)
 Nach 1 ist $b^2 = a \cdot p$, $c^2 = a \cdot q$,
 daher durch Addition: $b^2 + c^2 = a \cdot p + a \cdot q = a^2$.

Zweiter Beweis.
 Man errichte über den Katheten AB und AC des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Quadrate und senkrechte aus den Seiten verlaufen das Quadrat GHIJ. Zerlegt man dieselben in den Höhen der Dreiecke BC die Höhe BF und CE, so ist, weil $\triangle ABC \cong \triangle GFB \cong \triangle DEC$,
 nach BC = BF = EC.
 Zerlegt man BDEF das Quadrat über der Hypotenuse, und auch $\triangle JFE \cong \triangle ABC$.
 Man ist ersichtlich, daß das ganze Quadrat GHIJ = $b^2 + c^2 + 4 \triangle ABC$,
 oder auch $GHIJ = a^2 + 4 \triangle ABC$.
 $a^2 = b^2 + c^2$

Dritter Beweis.
 Man konstruiere die drei Quadrate über Dreieck und senkrechte verlaufen, wie aus der Figur ersichtlich, nämlich a^2 in 1-2 + 3 + 4 + 5, und b^2 und c^2 in die entsprechenden Stücke 1-2 + 3 + 4 + 5. Durch unmittelbare Vergleichung ergibt sich daher:
 $a^2 = b^2 + c^2$
Satz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Summe der Quadrate über der Hypotenuse und der anderen Kathete.
 $b^2 = a^2 - c^2$
 $c^2 = a^2 - b^2$
 Pythagoras aus Gama, in 6. Jahrhundert v. Chr.

3. Zum rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechte aus den beiden Projektionen der Katheten.
Satz. $h^2 = p \cdot q$
Erster Beweis.
 Man konstruiere über der Höhe h, der Katheten b und der Projektion p die Quadrate, und über der Projektion q das Rechteck GFEC mit der Seite GF = BC, wodurch JF = BG = q, und Rechteck JFEK = p \cdot q mit $h^2 = a \cdot p = a \cdot q = GFEC$,
 nach 2 $b^2 = b^2 + p^2 = b^2 + GJKC$,
 $b^2 + GJKC = GFEC$,
 $GJKC = GJKC$,
 subtrah: $b^2 = JFEK = p \cdot q$.

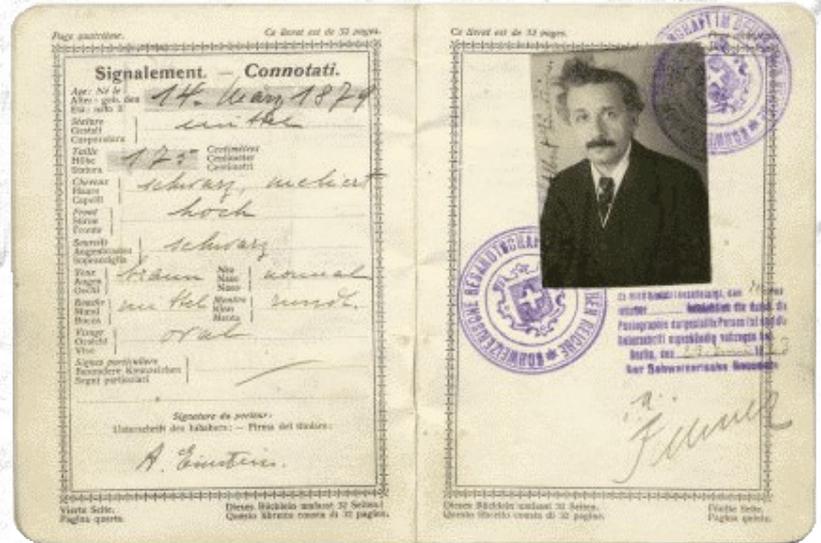
Zweiter Beweis.
 Man konstruiere das Quadrat über h, das Rechteck p \cdot q über p, und verlaufe das Rechteck GHEF. Geht man nun D mit F und H, so ist, weil $\beta = \angle ABD$,
 $\gamma = \angle ACD$,
 $\beta + \gamma = 90^\circ$,
 daher $\angle FDH = 90^\circ$, und FDH eine gerade Linie, mithin D ein Punkt der Diagonale des Rechtecks. Daher sind die Figuren b^2 und $p \cdot q$ Ursprungs-Beziehungsfiguren, und nach § 143 ist $b^2 = p \cdot q$.

Nachtrag des Pythagoräischen Satzes.
 Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern, so ist es rechtwinklig.
Beweis. $a^2 = b^2 + c^2$
 Beweis ist selbst. Wäre $\angle A \geq 90^\circ$, so hätte man ein spitzes, aber rechtwinkliges Dreieck konstruieren, dessen Katheten b und c sind, und dessen Hypotenuse a' selber wäre. Die beiden Dreiecke hätten dann zwei Seiten gleicher Größe, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich.
 Daher wäre nach § 72 $a \geq a'$, mithin auch $a^2 \geq a'^2$.
 In dem konstruierten rechtwinkligen Dreieck ist aber $a'^2 = b^2 + c^2$.
 Daher wäre nach § 6, II $a^2 \geq b^2 + c^2$,
 was der Voraussetzung widerspricht.



Riverside church, 1930

Krümmung = Schwerkraft



Reisepass 1923