Gedankenexperimente zum Äquivalenzprinzip
– Ein Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie –

Karl-Heinz Lotze, Jena

Elektrostatik und Gravitostatik – ein Vergleich

Wie schwer ist es, einen Körper zu beschleunigen (*alle* Kräfte)?

$$m_t a = F, \qquad m_t\text{: träge Masse}$$

Elektrostatik

Wie stark koppelt ein elektrisch geladener Körper an ein elektrisches Feld (Feldstärke E)?

$$F_E = qE, \qquad q\text{: elektrische Ladung}$$

$$a = \frac{q}{m_t}E, \qquad \frac{q}{m_t}\text{: spezifische elektrische Ladung}$$

Erfahrung:

$$\frac{q}{m_t} \lessgtr 0$$

Elektrostatik und Gravitostatik – ein Vergleich

Wie schwer ist es, einen Körper zu beschleunigen (*alle* Kräfte)?

$$m_t a = F, \qquad m_t\text{: träge Masse}$$

Gravitostatik

Wie stark koppelt ein gravitativ geladener Körper an ein Schwerefeld (Feldstärke g)? Kurz: Wie schwer ist der Körper?

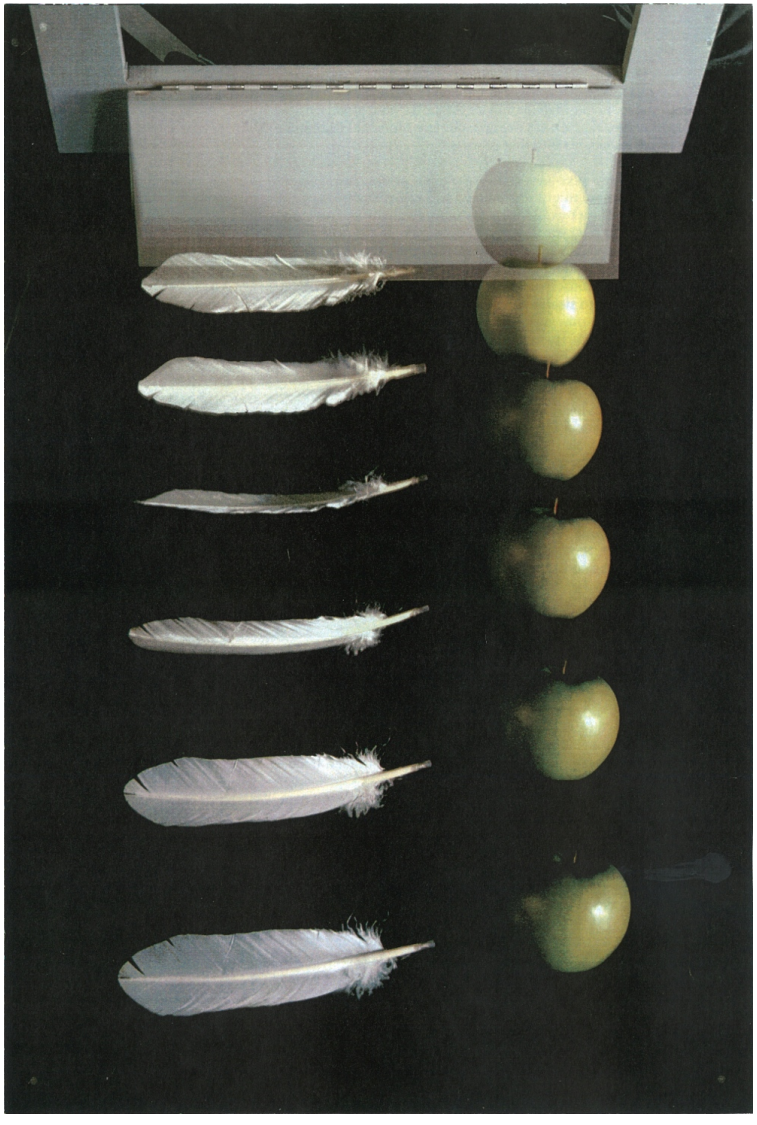
$$F_G = m_s g, \qquad m_s\text{: (passive) Gravitationsladung, schwere Masse}$$

$$a = \frac{m_s}{m_t} g, \qquad \frac{m_s}{m_t}\text{: spezifische Gravitationsladung}$$

Erfahrung: „Universalität der Gravitation“

$$\frac{m_{s(1)}}{m_{t(1)}} = \frac{m_{s(2)}}{m_{t(2)}} = \ldots = \text{const} \qquad \text{(o.B.d.A. const} = 1)$$

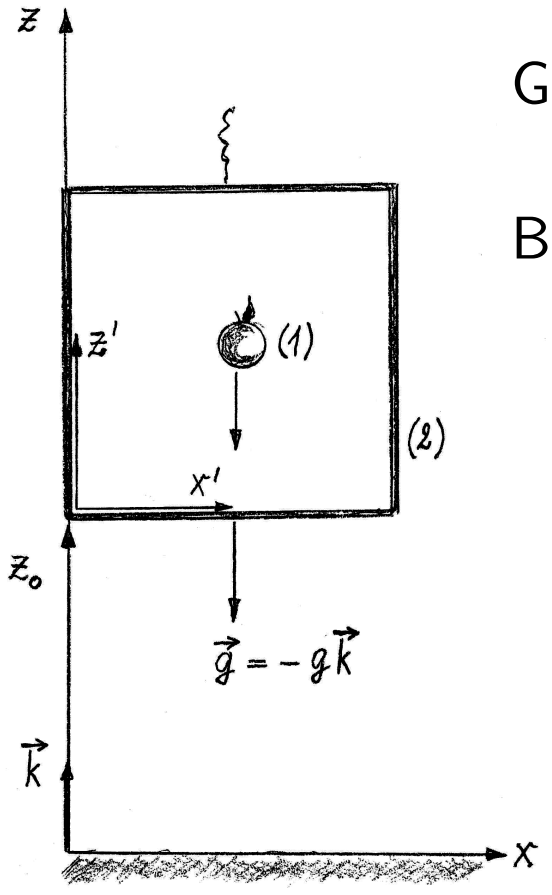
Universalität der Gravitation



Quelle: National Geographic

Gedankenexperiment: Einsteins Fahrstuhl

Gedankenexperiment *lokal*: Innerhalb der Fahrstuhlkabine ist die *Änderung* des Schwerefeldes unbeobachtbar klein ($\vec{g} = -g\vec{k}$).



$$z'(t) = z(t) - z_0(t)$$

Galileisches Fallgesetz für Apfel: $F = -m_{s(1)}g$

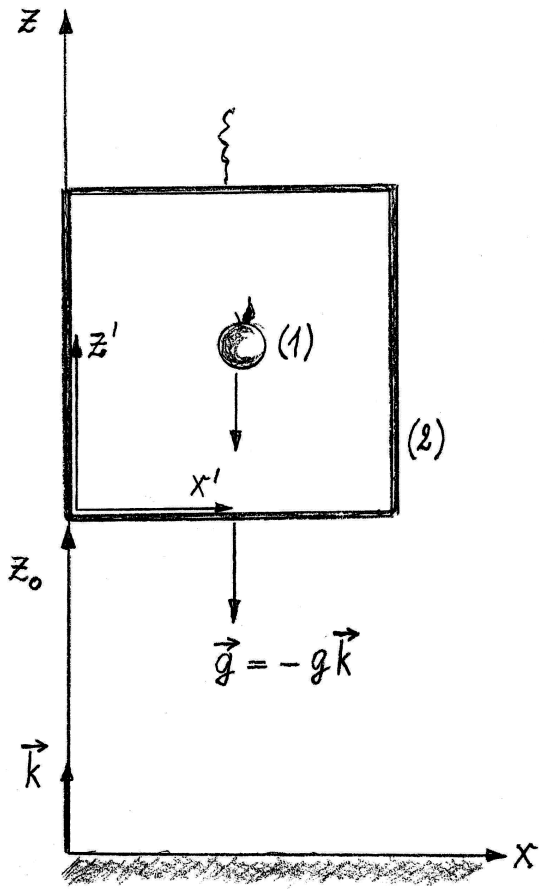
Beschleunigung der Kabine: $\ddot{z}_0 = -\dfrac{m_{s(2)}}{m_{t(2)}}g$

$$m_{t(1)}\ddot{z}' = F - m_{t(1)}\ddot{z}_0$$

$$\ddot{z}' = \left(-\frac{m_{s(1)}}{m_{t(1)}} + \frac{m_{s(2)}}{m_{t(2)}}\right) g$$

$$\ddot{z}' = 0 \qquad \text{für } m_s = m_t$$

Schwerelosigkeit



$$\ddot{z}' = 0 \qquad \text{für } m_s = m_t$$

keine Relativbeschleunigung zwischen Apfel und Kabine, Schwerelosigkeit

Bewegung des Apfels relativ zur Kabine (je nach Anfangsbedingungen):

- Ruhe
- geradlinig-gleichförmige Bewegung

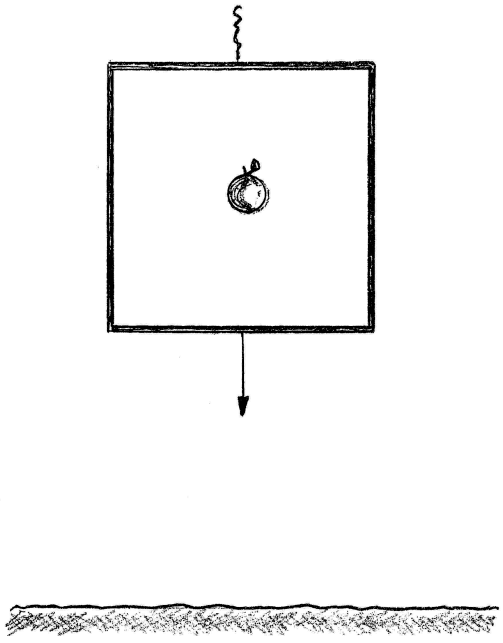
Vergleich mit Trägheitsgesetz:
Innenraum der Kabine ist Inertialsystem

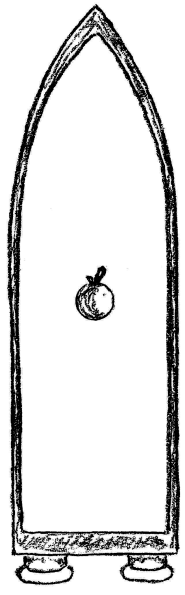
„Relativität des freien Falls“

Äquivalenzprinzip

In einem *kleinen* Labor, das in einem Schwerefeld frei fällt, sind *die Gesetze der Physik* dieselben wie jene, die in Abwesenheit eines Schwerefeldes in einem Newtonschen Inertialsystem gelten.

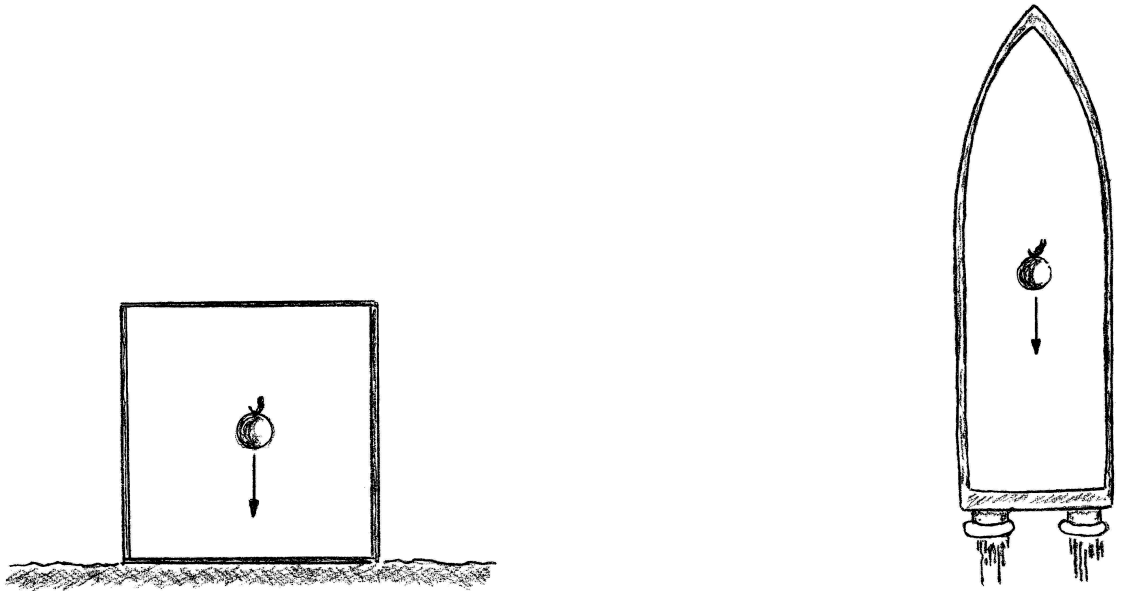
Äquivalenzprinzip – andere Formulierungen





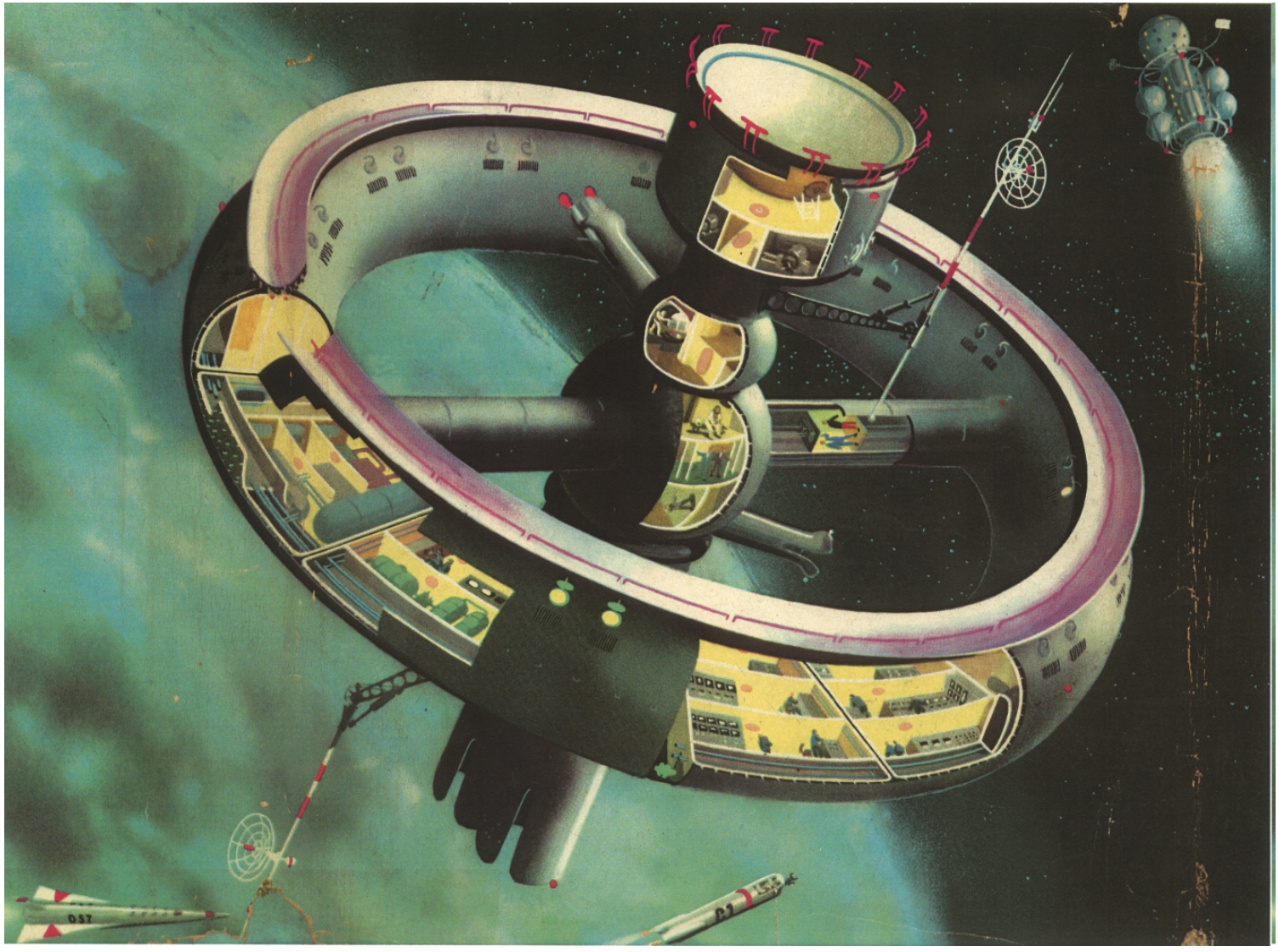
Kein lokales Experiment kann zwischen freiem Fall im Schwerefeld und geradlinig-gleichförmiger Bewegung (Ruhe) in Abwesenheit eines Schwerefeldes unterscheiden.

Äquivalenzprinzip – andere Formulierungen



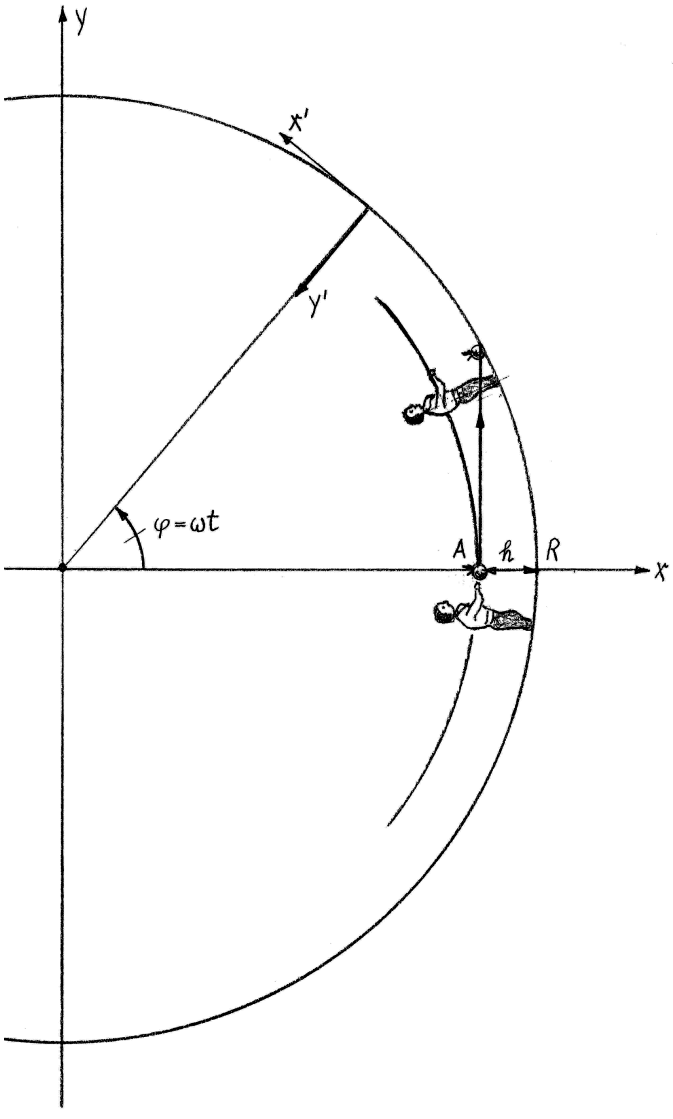
Ein gleichmäßig gegenüber einem Inertialsystem (Fixsternhimmel) beschleunigtes Bezugssystem ist *lokal* identisch mit einem Bezugssystem, das in einem Schwerefeld ruht.

Gedankenexperiment: rotierende Raumstation



Quelle: „Weltall – Erde – Mensch“

Gedankenexperiment: rotierende Raumstation



Trägheitsbahn des Apfels:

$$x = R - h = \text{const}, \qquad y = \omega(R-h)t$$

mitrotierender Beobachter:

$$x' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$
$$y' = R - x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

Experiment *lokal*:

$$\frac{h}{R} \ll 1, \quad \text{Flugdauer des Apfels } t_A \ll \frac{1}{\omega}$$

bis Ordnung $(\omega t)^2$:

$$x' \approx 0, \qquad y' \approx h - \tfrac{1}{2}R\omega^2 \cdot t^2$$

Gedankenexperiment: rotierende Raumstation

$x' \approx 0, \qquad y' \approx h - \frac{1}{2} R\omega^2 \cdot t^2$

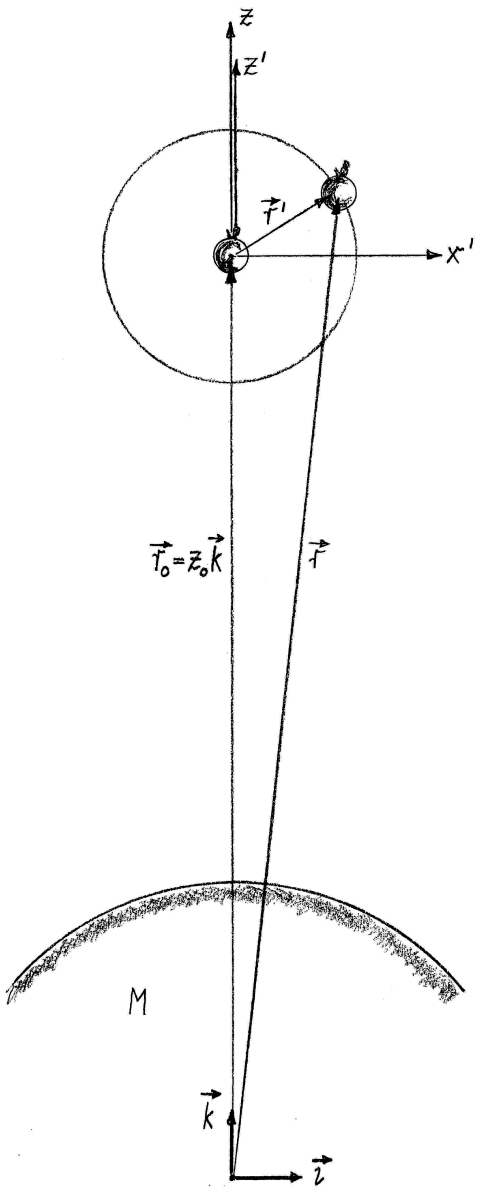
Beobachter in Raumstation erlebt die Bewegung des Apfels als freien Fall mit „künstlicher“ Schwerebeschleunigung $g = R\omega^2$ unabhängig von der Masse des Apfels.

Wenn *keine* Trägheitsbewegung stattfinden soll, muß eine Kraft ausgeübt werden.

Äquivalenzprinzip hier: für mitrotierenden Beobachter ist nicht zu unterscheiden,

- ob in der rotierenden Raumstation eine Kraft zum Zentrum hin den Apfel auf einer Kreisbahn hält, oder
- ob in der nichtrotierenden Raumstation eine Kraft nach „oben“ das Gewicht des Apfels ausgleicht, das sich aus der Schwerkraft durch äußere Massen ergibt.

Nichtlokale Gedankenexperimente



Experiment *nichtlokal*: Innerhalb der Fahrstuhlkabine ist die *Änderung* des Schwerefeldes beobachtbar.

Newtonsches Fallgesetz:

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

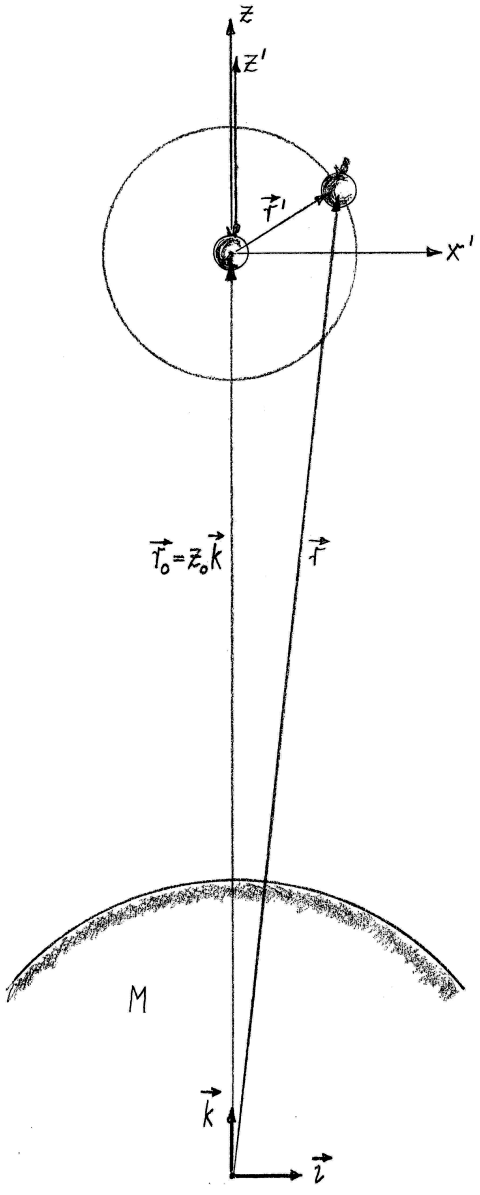
Beschleunigung des Kreismittelpunktes:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{GM}{z_0^2}\vec{k}$$

Relativbeschleunigung des Apfels in bezug auf den Kreismittelpunkt:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0$$

Nichtlokale Gedankenexperimente



$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0$$

für $|\vec{r}'| \ll z_0$:

$$\ddot{\vec{r}}' \approx -\frac{GM}{z_0^3}\left(x'\vec{i} - 2z'\vec{k}\right)$$

Also: Schwerelosigkeit ($\ddot{\vec{r}}' = 0$) existiert *nur in einem Punkt*, dem Kreismittelpunkt $x' = 0 = z'$.

Gezeiten

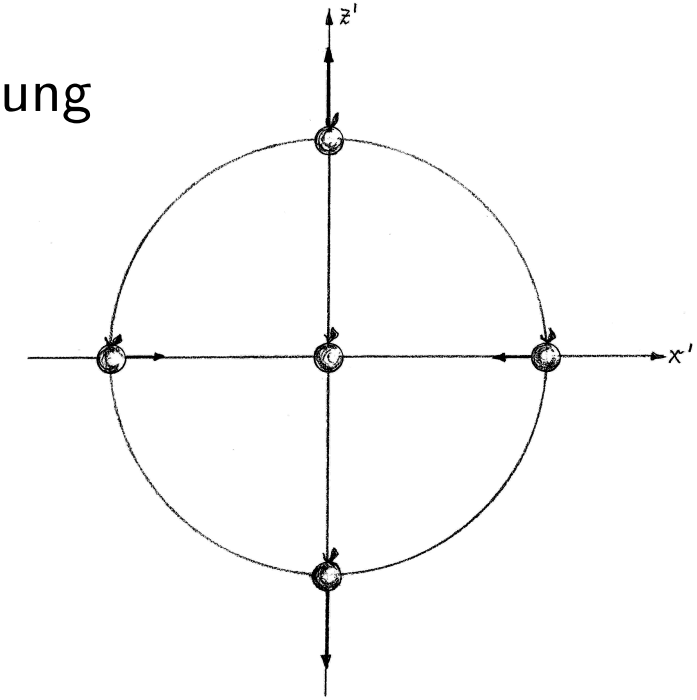
$$\ddot{\vec{r}}' \approx -\frac{GM}{z_0^3}\left(x'\vec{i} - 2z'\vec{k}\right)$$

- longitudinale (vertikale) Gezeitenwirkung

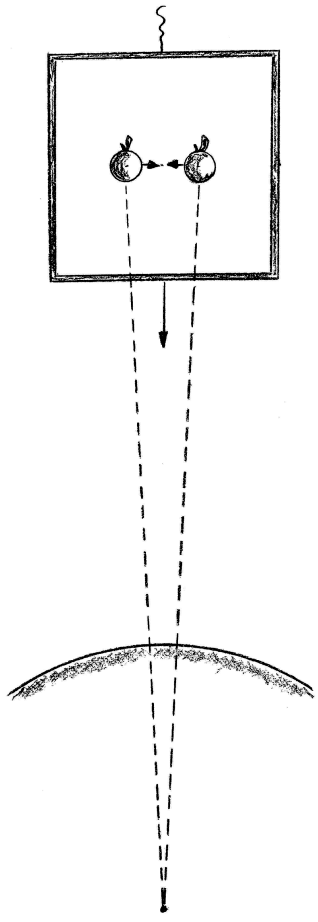
$$\ddot{z}' \approx \frac{GM}{z_0^2} \cdot 2\frac{z'}{z_0} \begin{cases} < 0 \text{ für } z' < 0 \text{ (1. Flutberg)} \\ > 0 \text{ für } z' > 0 \text{ (2. Flutberg)} \end{cases}$$

- transversale (horizontale) Gezeitenwirkung

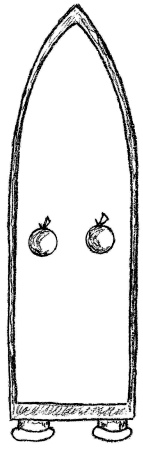
$$\ddot{x}' \approx -\frac{GM}{z_0^2} \cdot \frac{x'}{z_0} \begin{cases} > 0 \text{ für } x' < 0 \\ < 0 \text{ für } x' > 0 \end{cases}$$



Nichtlokale Gedankenexperimente

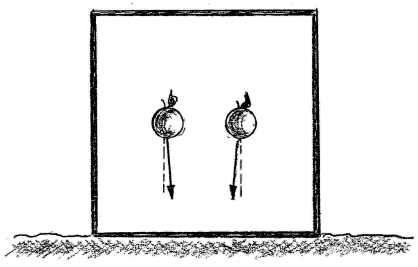


aber:

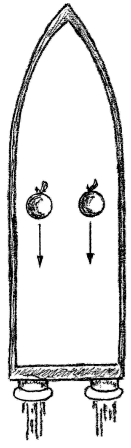


Inhomogenes Schwerefeld im Innern des Labors –
homogenes Beschleunigungsfeld im Innern des Raumschiffs.

Nichtlokale Gedankenexperimente



aber:



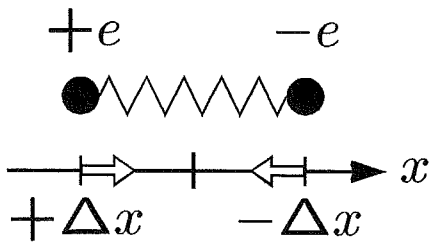
Inhomogenes Schwerefeld im Innern des Labors –
homogenes Beschleunigungsfeld im Innern des Raumschiffs.

Fazit: Die Anwesenheit eines Schwerefeldes ist durch seine *Änderung* feststellbar. Das Äquivalenzprinzip gilt für lokale Experimente.

Elektromagnetische und Gravitations-wellen - ein Vergleich

Elektromagnetische Wellen

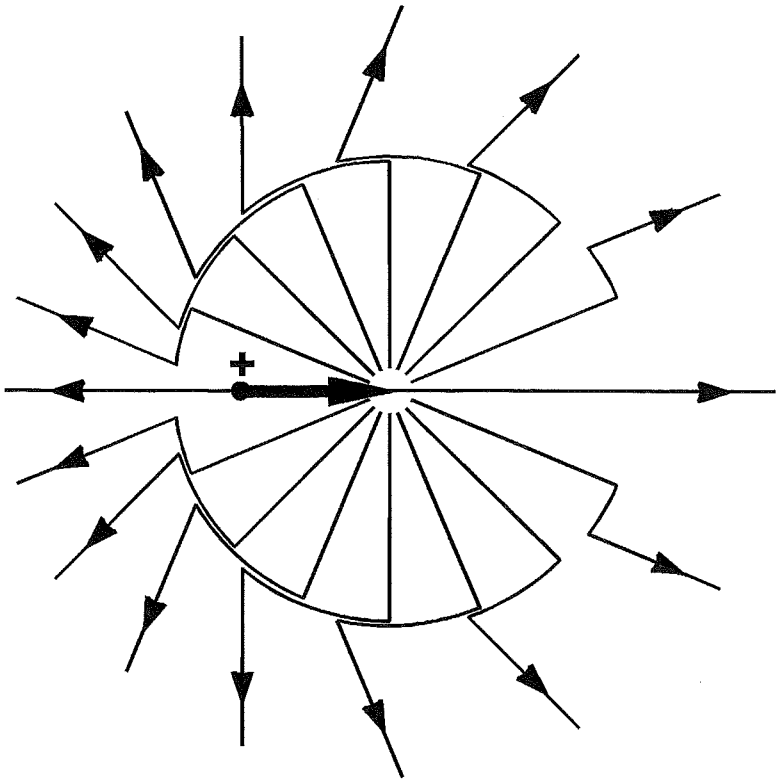
I. Elektrische *Dipole* erzeugen elektromagnetische Wellen



Kontraktion der Feder:

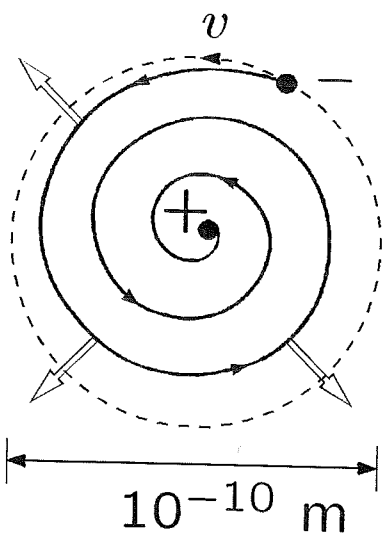
$$(+e)(+\Delta x) + (-e)(-\Delta x)$$
$$= 2(+e)(+\Delta x)$$
$$= 2(-e)(-\Delta x)$$

Ladungs-Mittelpunkt schwingt.



II. Sind Dimensionsanalysen Hindernisse oder Werkzeuge für den Physikunterricht?

Beispiel: Das Rutherford-Atom – Leistung elektromagnetischer Dipolstrahlung



$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim -\underbrace{(er)^{\alpha}\omega^{\beta}}_{\text{Systemgrößen}} \cdot \underbrace{c^{\gamma}\varepsilon_0^{\delta}}_{\text{Naturkonstanten}}$$

Dimensionsanalyse:

$$VA = V^{-\delta} A^{\alpha+\delta} m^{\alpha+\gamma-\delta} s^{\alpha-\beta-\gamma+\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2,\ \beta = 4,\ \gamma = -3,\ \delta = -1$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim -\frac{(er)^2\omega^4}{c^3\varepsilon_0} \quad \left(\text{Faktor } \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4\pi}\right)$$

III. *Strahlungsrückwirkung:* Lebensdauer des Rutherford-Atoms

$$\tau \approx \frac{E}{\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)} \approx 10^{-10}\,\text{s}$$

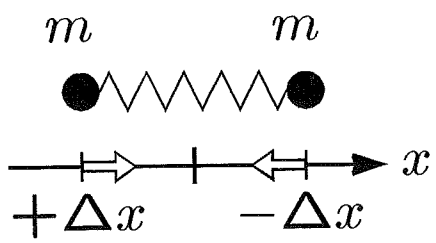
$\Rightarrow$ Bohr'sche Postulate, Quantenmechanik,...

Elektromagnetische und Gravitations-wellen - ein Vergleich

Gravitationswellen

Wheeler's principle: Never start a calculation before you know the answer!

I. Massen-Dipole erzeugen *keine* Gravitations-wellen



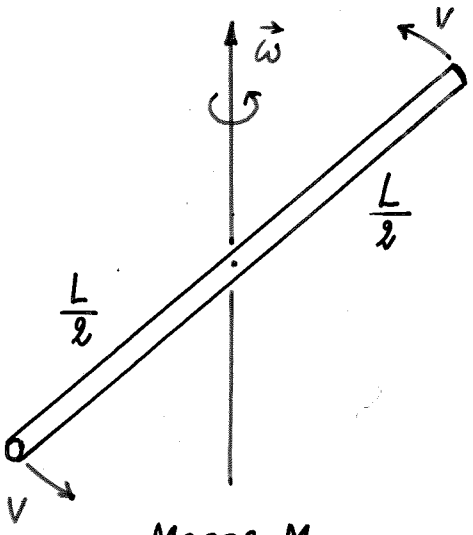
Kontraktion der Feder:

$$m(+\Delta x) + m(-\Delta x) = 0$$

Massen-Mittelpunkt schwingt *nicht*, aber:

$$m(+\Delta x)^2 + m(-\Delta x)^2 = 2m(\Delta x)^2$$

Der rotierende Stab



Leistung der Gravitationswellen-Abstrahlung:

$\therefore$ <u>Systemgrößen allein:</u>

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim M^{\alpha} L^{\beta} \omega^{\gamma}$$

Dimensionsanalyse:

$$\frac{kg\,m}{s^2}\, m\, \frac{1}{s} = kg^{\alpha} m^{\beta} s^{-\gamma}$$

$\rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim (ML^2)\,\omega^3 \qquad \text{(Quadrupol)}$$

$\therefore$ <u>Naturkonstanten allein:</u> $\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim G^{\alpha} c^{\beta}$

Dimensionsanalyse: $\frac{kg\,m^2}{s^3} = \frac{m^{3\alpha}}{kg^{\alpha} s^{2\alpha}} \frac{m^{\beta}}{s^{\beta}}$

$\rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = 5$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{c^5}{G} = 3{,}6 \cdot 10^{52}\ \frac{J}{s}$$

$\therefore$ Einfachste Kombination:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{2}{45}\ \frac{(ML^2)^2 \omega^6}{\frac{c^5}{G}}}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{2}{45} \frac{(ML^2)^2 \omega^6}{\frac{c^5}{G}}$$

∴ Bahngeschwindigkeit: $v = \frac{L}{2} \omega$

∴ Geometrisches Maß für Masse: $R_S = 2 \frac{GM}{c^2}$

Schwarzschild-Radius

$$\boxed{\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{32}{45} \left(\frac{R_S}{L}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 \cdot \frac{c^5}{G}}$$

∴ Schwarzschild-Radius: Erde $R_S = 0{,}89\ cm$

Sonne $R_S = 2{,}96\ km$

∴ „Kompaktheit": $\mathbb{C} = \frac{R_S}{R}$

Erde	Sonne	Weiße Zwerge
$1.4 \cdot 10^{-9}$	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$

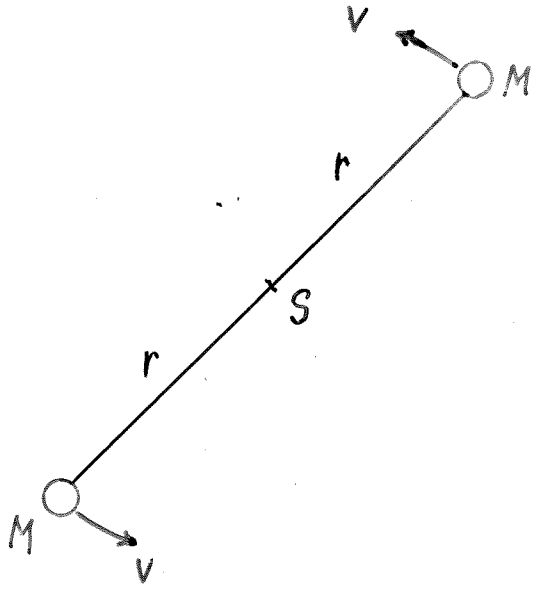
Neutronensterne	Schwarze Löcher
0,3	1

∴ Beispiel „rotierender Stab" ($M = 1\,kg$, $L = 1\,m$, $T = 1\,s$):

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = 7.6 \cdot 10^{-50} \frac{J}{s}$$

Ziel:
- kompakte Objekte
- relativistische Geschwindigkeiten

Bahnumlauf von Sternen



3. KEPLERsches Gesetz verknüpft v mit M

∴ Beispiel: Zwei gleiche Massen auf Kreisbahn

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Aus $\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \left(\frac{R_S}{L}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 \cdot \frac{c^5}{G}$

wird

$$\boxed{\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{2}{5}\left(\frac{R_S}{r}\right)^5 \cdot \frac{c^5}{G}}$$

↑ Kompaktheit

∴ Frage: Wie klein kann Bahnradius sein, damit $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ möglichst groß?

→ Begrenzung durch Sternradius

→ Kollabierte Objekte (Neutronensterne, Schwarze Löcher) in engen Doppelsternsystemen

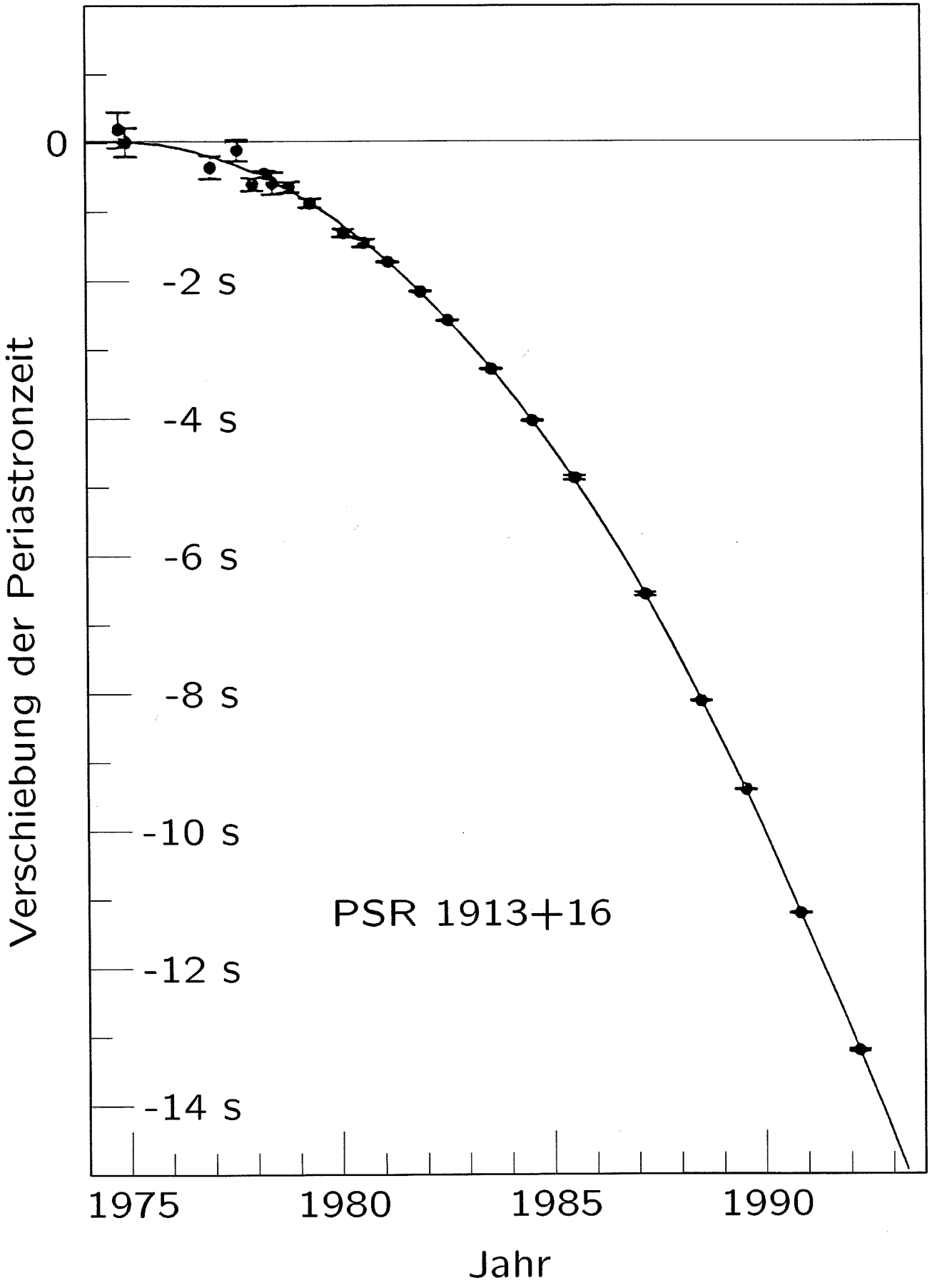
∴ Beispiel: PSR 1913+16 (Hülse, Taylor)

$M = 1{,}4\, M_\odot$; $r \approx 1{,}3\, R_\odot = 9 \cdot 10^5$ km

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx 3 \cdot 10^{25}\ \frac{J}{s}$$

Vergleich: Sonne – Merkur $75\ \frac{J}{s}$ („Glühbirne")

Sirius A, B $10^8\ \frac{J}{s}$


0
-2 s
-4 s
-6 s
-8 s
-10 s
-12 s
-14 s
Verschiebung der Periastronzeit
PSR 1913+16
1975
1980
1985
1990
Jahr