

Schwarze Löcher

Reinhard Meinel

Friedrich-Schiller-Universität Jena

1. Einleitung
2. Die Schwarzschild-Lösung
3. Der Ereignishorizont
4. Radiale Null-Geodäten
5. Kollaps zum Schwarzen Loch
6. Rotierende und geladene Schwarze Löcher
7. Eindeutigkeit Schwarzer Löcher
8. Quasistationäre Wege zu Schwarzen Löchern
9. Das galaktische Zentrum

1. Einleitung

- Die Fluchtgeschwindigkeit in der Newtonschen Gravitationstheorie

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (G: \text{Gravitationskonstante}, M: \text{Masse}, R: \text{Radius})$$

wird größer als die Lichtgeschwindigkeit c für

$$R < \frac{2GM}{c^2}$$

- [John Michell \(1724-1793\)](#) und [Pierre-Simon Laplace \(1749-1827\)](#) folgerten (unter Verwendung der Korpuskulartheorie des Lichts): Ein solches Objekt wäre aus der Ferne unsichtbar.
- Heutiges Wissen: Diese Überlegung war zu einfach. Wir benötigen die Einsteinsche Gravitationstheorie zur Beschreibung der Lichtausbreitung in starken Gravitationsfeldern! Die Grundidee war jedoch richtig, und der kritische Radius $2GM/c^2$ wird uns sogleich als **“Schwarzschild-Radius”** wiederbegegnen.

2. Die Schwarzschild-Lösung

- Allgemeine kugelsymmetrische Vakuum-Lösung der Einstein-Gleichungen:
Karl Schwarzschild (1916)

$$ds^2 \equiv g_{ik} dx^i dx^k = \frac{dr^2}{1 - r_S/r} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - (1 - r_S/r)c^2 dt^2$$

mit $x^1 = r, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi, x^4 = ct$, Schwarzschild-Radius $r_S = \frac{2GM}{c^2}$

- beschreibt das äußere Gravitationsfeld kugelsymmetrischer Sterne ($r > R$)
- “Normale” Sterne im Gleichgewicht: $R \gg r_S$ (Sonne: $r_S \approx 3$ km); sogar für Neutronensterne: $R > r_S \Rightarrow$ kein Problem mit der Singularität der Metrik bei $r = r_S$
- Gravitationskollaps: kann zu $R(\tau) < r_S$ führen (τ : Eigenzeit eines “Beobachters” auf der Oberfläche des kollabierenden Sterns)
- Erste strenge (idealisierte) Kollapsrechnung in der allgemeinen Relativitätstheorie:
Oppenheimer & Snyder (1939) \Rightarrow “Schwarze Löcher” (Wheeler 1968)

3. Der Ereignishorizont

- $r = r_S$ ist eine Singularität der Schwarzschild-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$
- Übergang zu Eddington-Finkelstein-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, v)$:

$$ct = v - r - r_S \ln |r/r_S - 1|, \quad c dt = dv - \frac{dr}{1 - r_S/r}$$

$$\Rightarrow ds^2 = 2 dr dv + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - (1 - r_S/r) dv^2$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(1 - r_S/r) \end{pmatrix} \quad \text{regulär bei } r = r_S!$$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 - r_S/r & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \vartheta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i$$

- $r = r_S$ ist eine “Null-Hyperfläche”

Allgemeine Hyperfläche in der Raumzeit: $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = \text{constant}$

Infinitesimales Fortschreiten in der Hyperfläche (dx^k tangential):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = n_k dx^k = g_{ik} n^i dx^k = 0$$

Bei einer Null-Hyperfläche ist der Normalenvektor $n_k = \partial f / \partial x^k$ lichtartig:

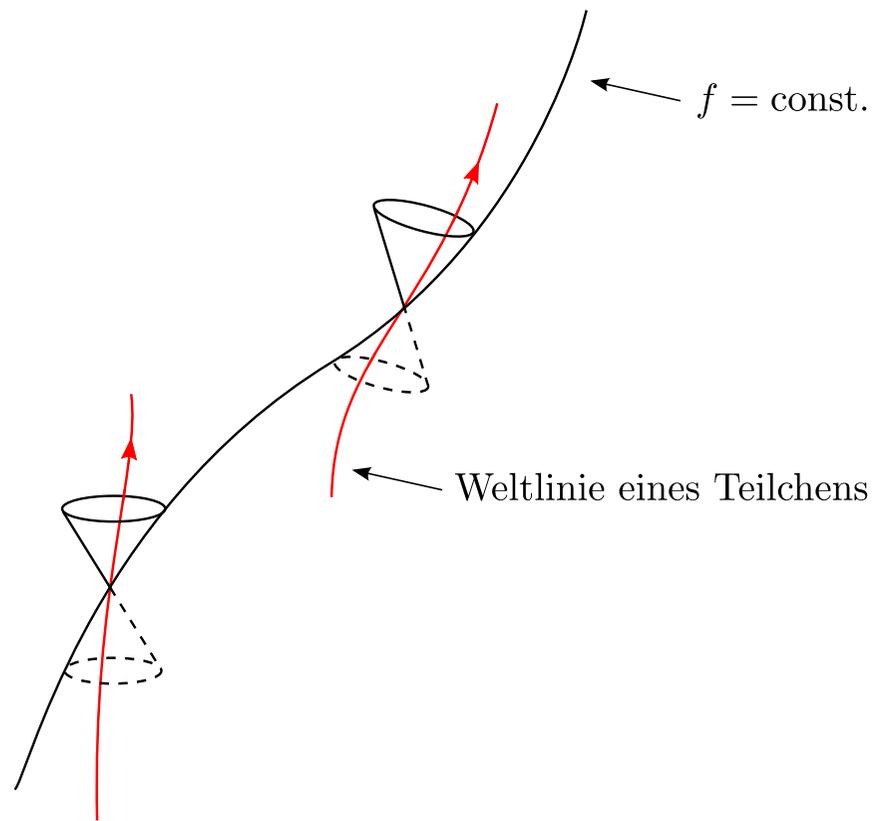
$$n_k n^k = g_{ik} n^i n^k = g^{ik} n_i n_k = 0$$

$\Rightarrow df = 0$ für $dx^k \propto n^k \Rightarrow$ der Normalenvektor ist gleichzeitig tangential!

Außerdem gilt für $dx^k \propto n^k$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \propto g_{ik} n^i n^k = 0 \Rightarrow n^k \text{ ist auch tangential zum Lichtkegel!}$$

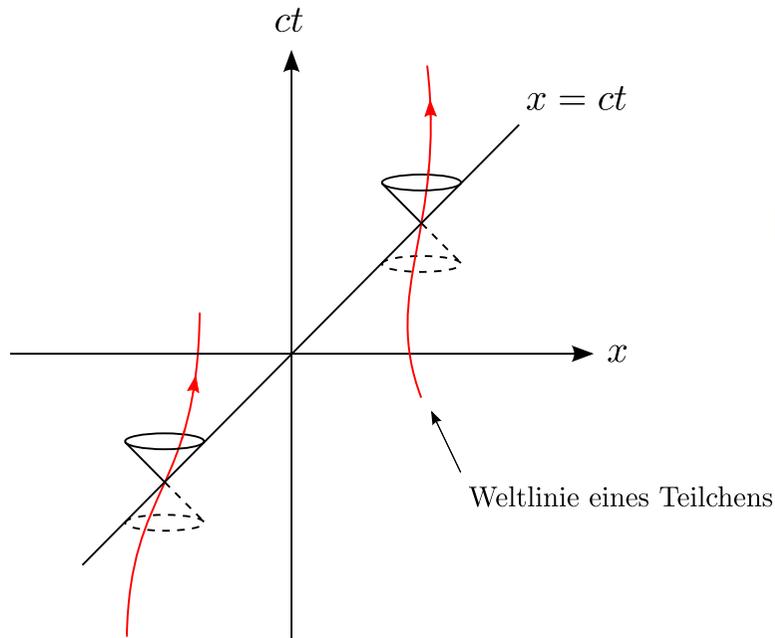
(Alle anderen zu n^k senkrechten Richtungen sind raumartig.)



Aus Stetigkeitsgründen liegen alle Zukunftslichtkegel auf einer Seite der Hyperfläche
 \Rightarrow Teilchen, "Beobachter", Lichtstrahlen (zeitartige oder lichtartige Weltlinien) können die Hyperfläche nur **in einer Richtung** durchqueren!

Beispiel:

Hyperfläche $f \equiv x - ct = 0$ im Minkowski-Raum $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$



Keine Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit!

$$n_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = (1, 0, 0, -1) \Rightarrow n_i n^i = g^{ik} n_i n_k = g^{11} + g^{44} = 0$$

Zurück zu unserer Hyperfläche $f \equiv r = r_S$:

In Eddington-Finkelstein-Koordinaten ($x^1 = r, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi, x^4 = v$) folgt

$$n_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow n_i n^i = g^{ik} n_i n_k = g^{11} = 0 \Rightarrow \text{Null-Hyperfläche}$$

Diese Null-Hyperfläche erstreckt sich nicht bis ins räumlich Unendliche. Ihr Schnitt $v = \text{const.}$ ist eine geschlossene raumartige Fläche (mit Flächeninhalt $4\pi r_S^2$).

- Sie ist ein **“Ereignishorizont”**.
- $r < r_S$: **Schwarzes Loch**

Teilchen und Lichtstrahlen können in das Schwarze Loch hereinkommen, aber nicht wieder aus ihm heraus. Einmal im Schwarzen Loch, gelangen sie unausweichlich zur echten Singularität bei $r = 0$.

Allgemeine Definition: Ein Schwarzes Loch ist ein Raumzeitbereich, aus dem keine in die Zukunft gerichteten zeitartigen oder lichtartigen Weltlinien bis ins räumlich Unendliche gelangen können. Der Ereignishorizont ist der Rand dieses Raumzeitbereiches.

4. Radiale Null-Geodäten

$$\vartheta = \text{const.}, \varphi = \text{const.} \ \& \ ds^2 = 0 \Rightarrow 2 dr dv - (1 - r_S/r) dv^2 = 0$$

Drei mögliche Lösungen:

(a) $dv = 0 \Rightarrow v = \text{const.}$

(b) $(1 - r_S/r)dv = 2 dr \Rightarrow v = 2r + 2r_S \ln |r/r_S - 1| + \text{const.}$

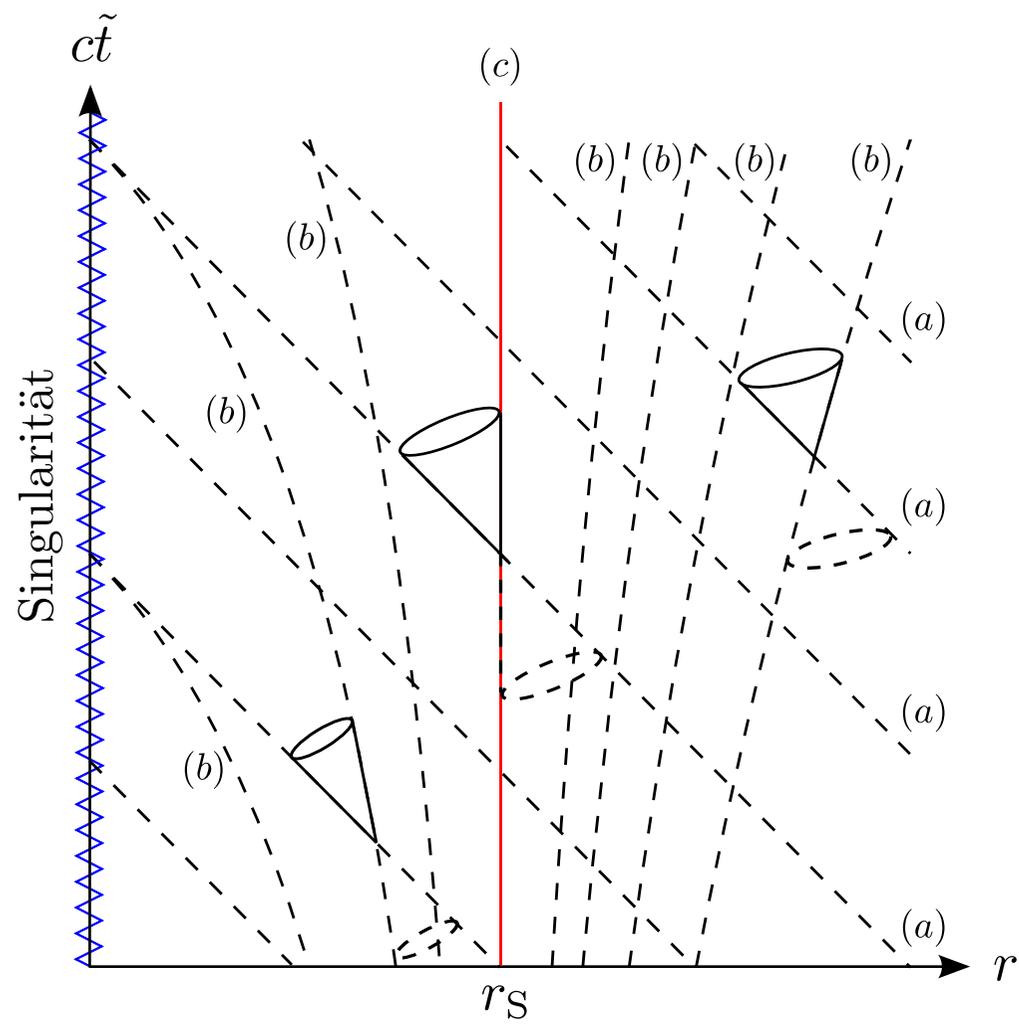
(c) $r = r_S$

Einführung einer neuen Zeitkoordinate \tilde{t} gemäß

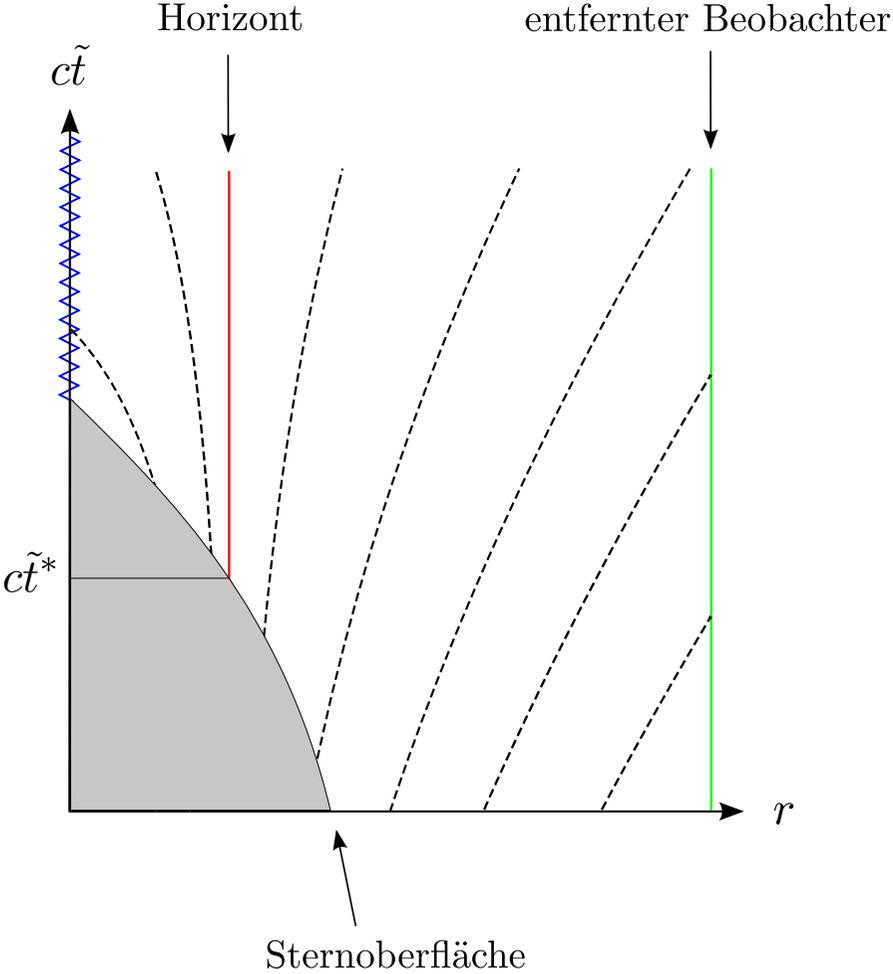
$$c\tilde{t} \equiv v - r$$

• \tilde{t} ist im gesamten Bereich $0 < r < \infty$ zeitartig (d.h. der Normalenvektor der Hyperflächen $\tilde{t} = \text{const.}$ ist zeitartig). Für $r \gg r_S$: $\tilde{t} \approx t$

($r > r_S$: t zeitartig, r raumartig; $r < r_S$: t raumartig, r zeitartig)



5. Kollaps zum Schwarzen Loch



6. Rotierende und geladene Schwarze Löcher

- Kerr-Newman-Lösung (Newman et al. 1965):

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q^2)a^2 \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{(2Mr - Q^2)2a \sin^2 \vartheta}{\Sigma} d\varphi dt - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \quad \text{Einheiten: } G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$$

(r, ϑ, φ, t : Boyer-Lindquist-Koordinaten)

Elektromagnetisches Vierer-Potential: $(A_r, A_\vartheta, A_\varphi, A_t) = \frac{Qr}{\Sigma} (0, 0, a \sin^2 \vartheta, -1)$

M : Masse, Q : elektrische Ladung, $a = J/M$, J : Drehimpuls

$Q = 0$: Kerr-Lösung (Kerr 1963)

- Magnetisches Moment: $\mu = Qa = QJ/M$ (d.h. gyromagnetischer Faktor $g = 2$)
- Die Lösung beschreibt ein Schwarzes Loch genau dann, wenn $Q^2 + a^2 \leq M^2$

$(Q^2 + a^2 = M^2$: “extreme Kerr-Newman-Lösung”)

Ereignishorizont: $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ ($\Delta = 0$)

$r < r_+$: **Schwarzes Loch**

Singularität: $r = 0$ und (für $a \neq 0$) $\vartheta = \pi/2$ ($\Sigma = 0$)

Grenzfläche der Stationarität: $r = r_0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}$ ($g_{tt} = 0$)

$r_+ < r < r_0(\vartheta)$: **Ergosphäre** ($g_{tt} > 0$)

- Die Ergosphäre existiert nur für rotierende Schwarze Löcher ($a = 0$: $r_0 = r_+$).
- Innerhalb der Ergosphäre gilt für alle in die Zukunft gerichteten zeitartigen oder lichtartigen Weltlinien $d\varphi/dt > 0$ (für $a > 0$).

Bemerkung: “Winkelgeschwindigkeit des Horizontes” $\Omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$

- Kreisbahnen von Testteilchen in der “Äquatorebene” ($\vartheta = \pi/2$) im astrophysikalisch relevanten Fall $Q = 0$ (d.h. Kerrsches Schwarzes Loch):

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{M^{1/2}}{r^{3/2} \pm aM^{1/2}} \quad (+ \text{ für } \Omega > 0, - \text{ für } \Omega < 0)$$

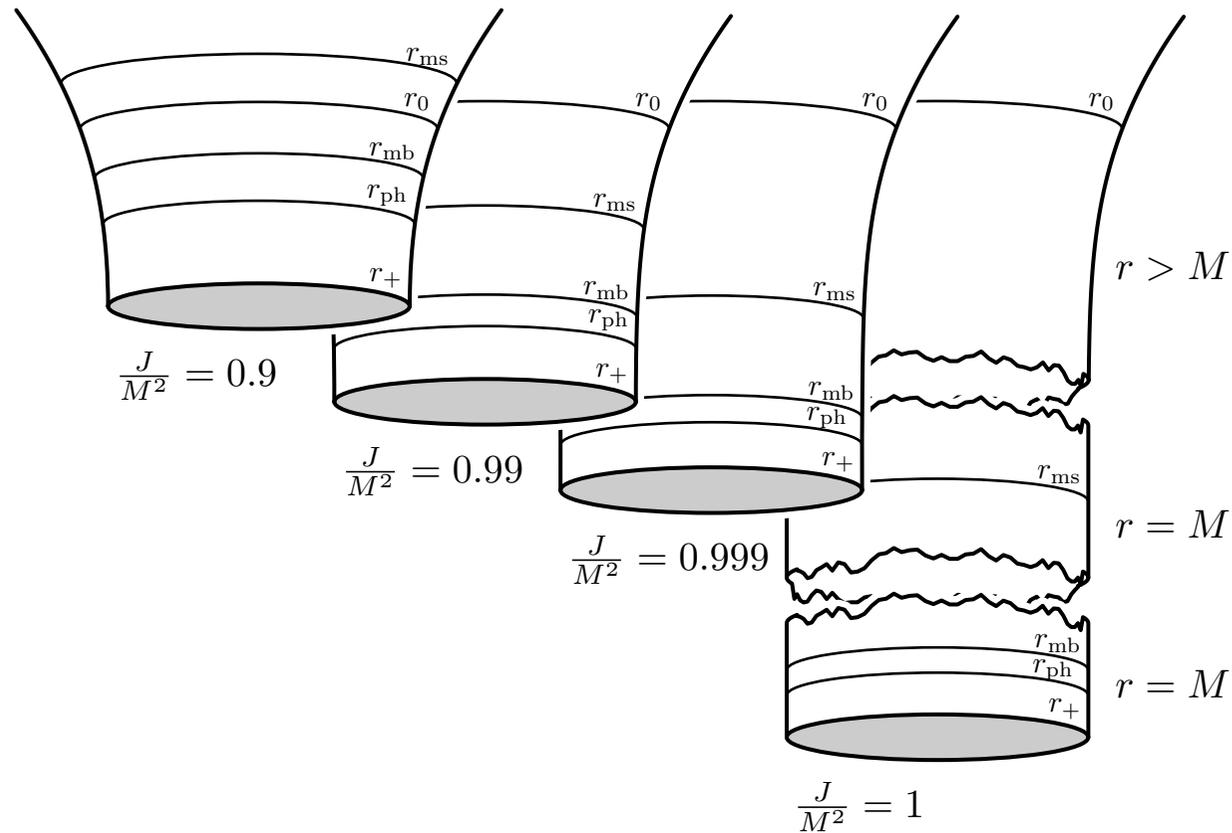
$$\text{Umlaufperiode: } T = \frac{2\pi}{|\Omega|} \Rightarrow \frac{1}{2}(T^+ + T^-) = 2\pi \frac{r^{3/2}}{M^{1/2}}, \quad T^+ - T^- = 4\pi a$$

Sie existieren für $r > r_{\text{ph}}$ (Photonenkreisbahn),
sind gebunden für $r > r_{\text{mb}}$ (marginal gebundene Kreisbahn),
sind stabil für $r > r_{\text{ms}}$ (marginal stabile Kreisbahn).

$$a = 0 \text{ (Schwarzschild-Lösung): } r_{\text{ph}} = 3M, r_{\text{mb}} = 4M, r_{\text{ms}} = 6M$$

$$a = M \text{ (extreme Kerr-Lösung): } r_{\text{ph}}^+ = M, r_{\text{mb}}^+ = M, r_{\text{ms}}^+ = M$$

$$r_{\text{ph}}^- = 4M, r_{\text{mb}}^- = (3 + 2\sqrt{2})M, r_{\text{ms}}^- = 9M$$



Der Bereich $r > r_+$ der "Äquatorebene" $\vartheta = \pi/2$, $t = \text{const.}$ der Kerr-Metrik bei Annäherung an den extremen Fall $J = M^2$ ($a = M$) — eingebettet in den Euklidischen Raum. Die Radien r_{ph} , r_{mb} , r_{ms} gehören alle zu $\Omega > 0$.

- Für ein Schwarzes Loch mit $M \approx 4 \times 10^6 M_\odot$ erhält man:

$$\underline{a = 0}: T_{\min} = T \Big|_{r=6M} \approx 30 \text{ min}, \quad \underline{a = M}: T_{\min} = T^+ \Big|_{r=M} \approx 4 \text{ min}$$

$$\text{Weiterhin gilt für } a = M: T^+ - T^- \approx 4 \text{ min}, \quad \frac{1}{2} (T^+ + T^-) \Big|_{r=9M} \approx 56 \text{ min}$$

7. Eindeutigkeit Schwarzer Löcher

- Die Kerr-Newman-Lösung für ein Schwarzes Loch ist nicht nur irgendeine spezielle Lösung der Einstein-Maxwell-Gleichungen. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen kann man beweisen, daß alle stationären, asymptotisch flachen (Elektro-)Vakuum-Raumzeiten, die das Außenfeld eines einzelnen Schwarzen Lochs beschreiben, durch die Kerr-Newman-Lösung gegeben sind (**“no-hair theorem”**). Wichtige Beiträge hierzu stammen von [Israel, Carter, Hawking, Robinson and Mazur \(1967-1982\)](#); Details findet man in [Chruściel, Costa & Heusler, Living Rev. Relativity 15 \(2012\) 7](#).
- Unter der Voraussetzung von Stationarität und Axialsymmetrie kann man die Kerr-Newman-Lösung auf direktem Wege als Lösung des entsprechenden Randwertproblems der Einstein-Maxwell-Gleichungen herleiten ([R.M. 2012](#)).
- Ohne elektrische Ladung und falls die Hypothese der **kosmischen Zensur** ([Penrose 1969](#)) zutrifft, ist damit zu erwarten, daß ein vollständiger Gravitationskollaps immer zu einem Kerrschen Schwarzen Loch führt!

“In my entire scientific life, extending over forty-five years, the most shattering experience has been the realization that an exact solution of Einstein’s equations of general relativity, discovered by the New Zealand mathematician, Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive black holes that populate the universe.”

(S. Chandrasekhar, Ryerson Lecture, Chicago 1975)

8. Quasistationäre Wege zu Schwarzen Löchern

- Gibt es Sequenzen von Gleichgewichtskonfigurationen normaler Materie, die stetig (durch Änderung eines Parameters) zu Schwarzen Löchern führen?
Für (ungeladene) Flüssigkeitskonfigurationen ohne Rotation ist die Antwort “Nein”.

- Notwendige und hinreichende Bedingung für den Übergang einer Gleichgewichtskonfiguration einer rotierenden Flüssigkeit zu einem Schwarzen Loch (R.M. 2006):

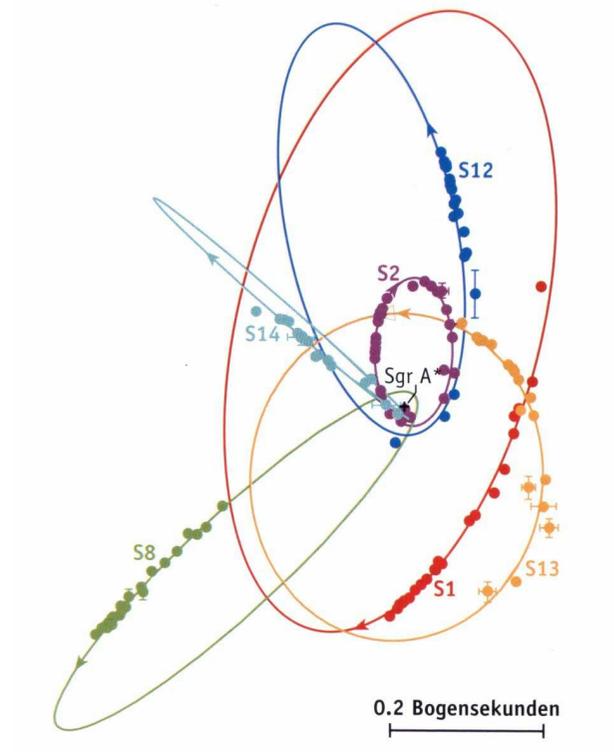
Ein quasistationärer (parametrischer) Übergang einer Flüssigkeitskonfiguration zu einem Schwarzen Loch erfolgt genau dann, wenn im Grenzfall die Beziehung

$$Mc^2 - 2\Omega J \rightarrow 0$$

erfüllt wird (M , Ω und J : Masse, Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls).

- Konsequenz: Ein derartiger Übergang führt immer zur **extremen Kerr-Lösung!**
- Erstes Beispiel: Staubscheibe (Bardeen & Wagoner 1971, Neugebauer & M. 1995)
- Weitere Beispiele, für echte Flüssigkeitskörper, wurden numerisch gefunden.

9. Das galaktische Zentrum



S. Gillessen & R. Genzel, *Sterne und Weltraum*, Dezember 2006

- Masse von Sgr A* : $M \approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$
- Entfernung Sgr A* – Sonnensystem: ca. 25 000 Lichtjahre
- Der Stern S2 bewegte sich im Frühjahr/Sommer 2002 mit einer Geschwindigkeit von ca. 10 000 km/s im Abstand von ca. 17 Lichtstunden (ca. $3 \times$ Abstand Sonne – Pluto) an Sgr A* vorbei.
- Umlaufzeit von S2: ca. 15 Jahre, Maximalabstand zu Sgr A* : ca. 11 Lichttage
- Schwarzschildradius für $M \approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$: $r_S \approx 10$ Mio km $\approx 1/2$ Lichtminute
- M87 : $M_{SL} \approx 2 \times 10^9 M_{\odot} \rightarrow r_S \approx 5$ Lichtstunden

Literatur

L.D. Landau & E.M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields*, Elsevier Science, Oxford 1975

R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago 1984

S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford 1998

V.P. Frolov & I.D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998

R. Meinel, Constructive proof of the Kerr-Newman black hole uniqueness including the extreme case, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 035004

R. Meinel, On the black hole limit of rotating fluid bodies in equilibrium, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 1359

R. Meinel, M. Ansorg, A. Kleinwächter, G. Neugebauer & D. Petroff, *Relativistic Figures of Equilibrium*, Cambridge University Press, Cambridge 2008 (Paperback-Ausgabe: 2012)