Die Einsteinsche Feldgleichung

Volker Perlick
ZARM, Univ. Bremen, Germany

Eisenbahnfriedhof Uyuni, Bolivien

Heraeus-Seminar “100 Jahre Allgemeine Relativitätstheorie”
Potsdam, 11 März 2015

Newton	Einstein
$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \vec{\nabla}\phi = 0$	???
$\frac{1}{4\pi G}\Delta\phi = \mu$	???

ϕ (Gravitationspotential) $\longmapsto$???

μ (Massendichte) $\longmapsto$???

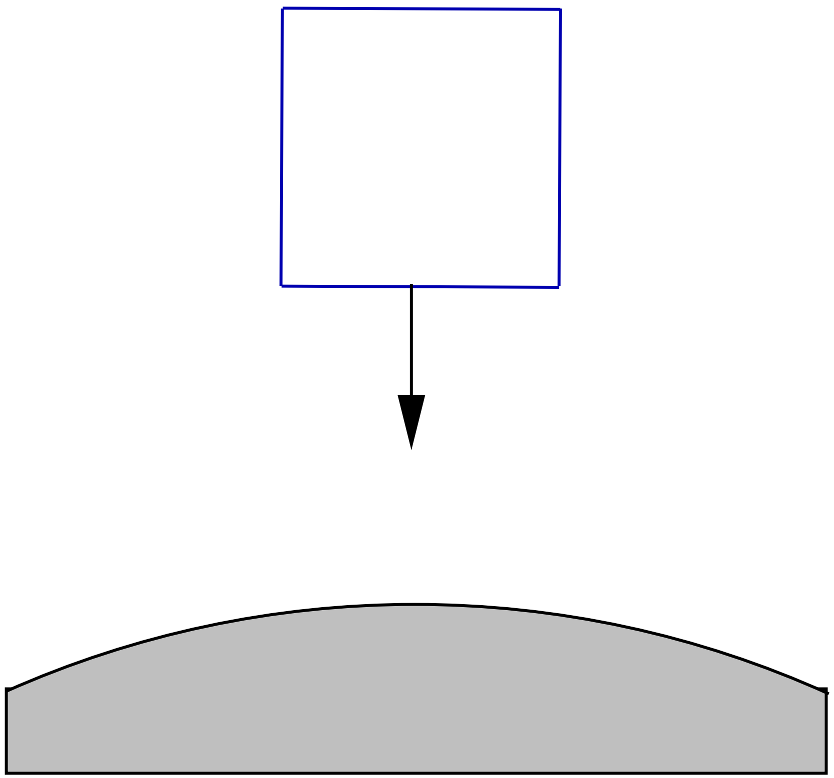
$$m_{\text{träge}} \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + m_{\text{schwer}} \vec{\nabla}\phi = 0$$

Äquivalenzprinzip:

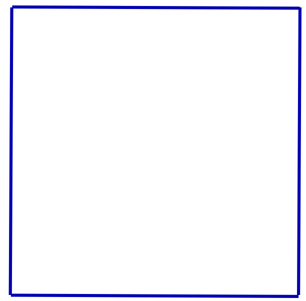
$$m_{\text{träge}} = m_{\text{schwer}}$$

Eötvös: 10^{-7} **(1889)**

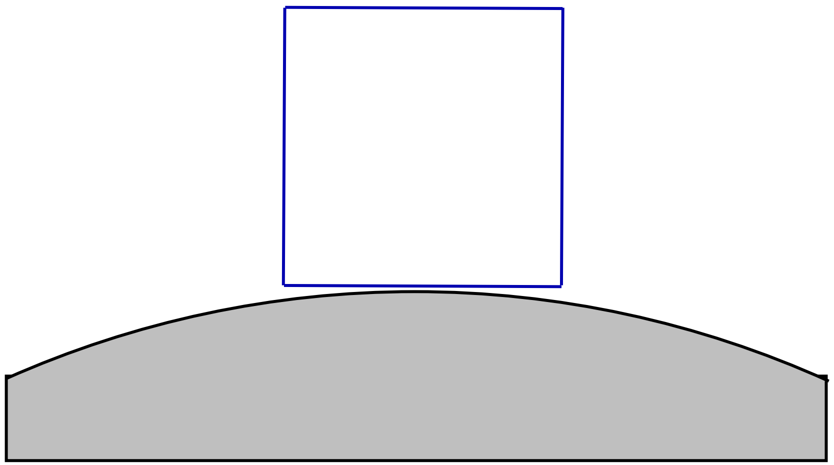
Eöt-Wash: 10^{-13} **(2001)**



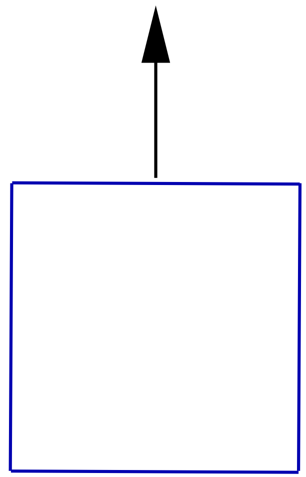
Frei fallender Kasten im
homogenen Gravitationsfeld



Ruhender Kasten in
einem Inertialsystem



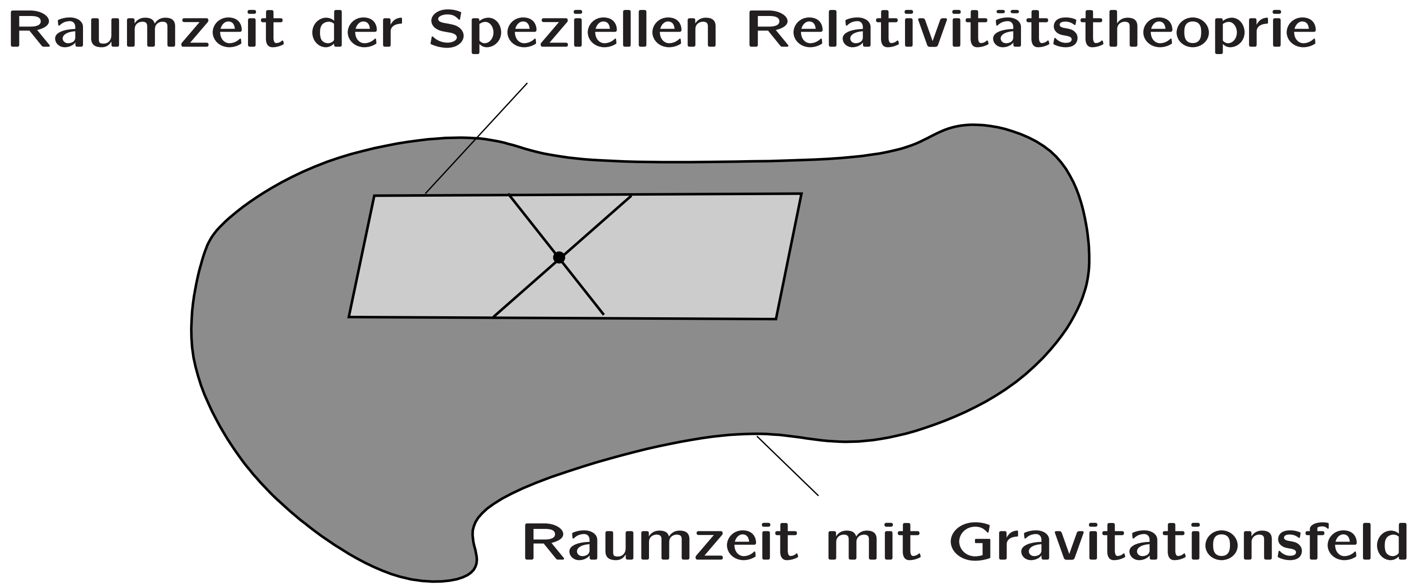
Ruhender Kasten im homogenen Gravitationsfeld



Kasten, der gegenüber einem Inertialsystem gleichmäßig beschleunigt wird

Äquivalenzprinzip $\Longrightarrow$

Im Infinitesimalen gilt die Spezielle Relativitätstheorie



Raumzeit mit Gravitationsfeld = Mannigfaltigkeit mit Metrik $g_{\mu\nu}$

Im Gravitationsfeld frei fallende Teilchen = zeitartige Geodäten

Newton	Einstein
$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \vec{\nabla}\phi = 0$$	$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma = 0\,,$$
$$\frac{1}{4\pi G}\Delta\phi = \mu$$	???

ϕ **(Gravitationspotential)** $\longmapsto$???

μ **(Massendichte)** $\longmapsto$???

Newton	Einstein
$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \vec{\nabla}\phi = 0$$	$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma = 0\,,$$
$$\frac{1}{4\pi G}\Delta\phi = \mu$$	???

ϕ **(Gravitationspotential)** $\longmapsto$ $g_{\mu\nu}$ **(Raumzeitmetrik)**

μ **(Massendichte)** $\longmapsto$ **???**

Was ersetzt die Massendichte μ auf der rechten Seite der Feldgleichung?

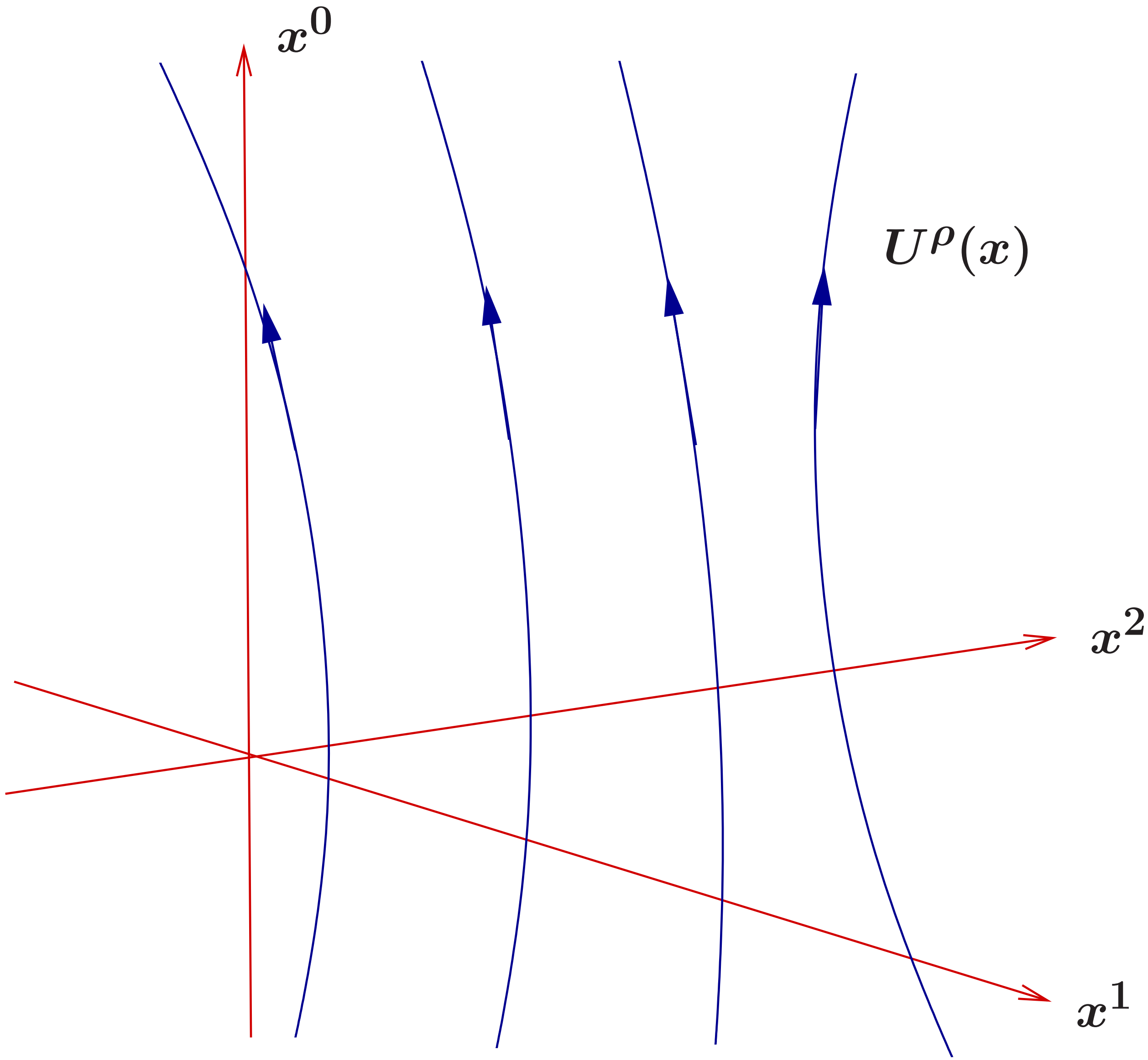
Masse ist in der (Speziellen) Relativitätstheorie eine Form von Energie

$$\text{Massendichte} \mapsto \text{Energiedichte}$$

Energiedichte ist in der (Speziellen) Relativitätstheorie beobachterabhängig

$$\text{Energiedichte} \mapsto \text{Energie-Impuls-Tensor}$$

Energie-Impuls-Tensor für Staub ("inkohärente Materie")



Energiedichte = Energie / Volumen

Betrachte kleines Volumen um x

Energie:

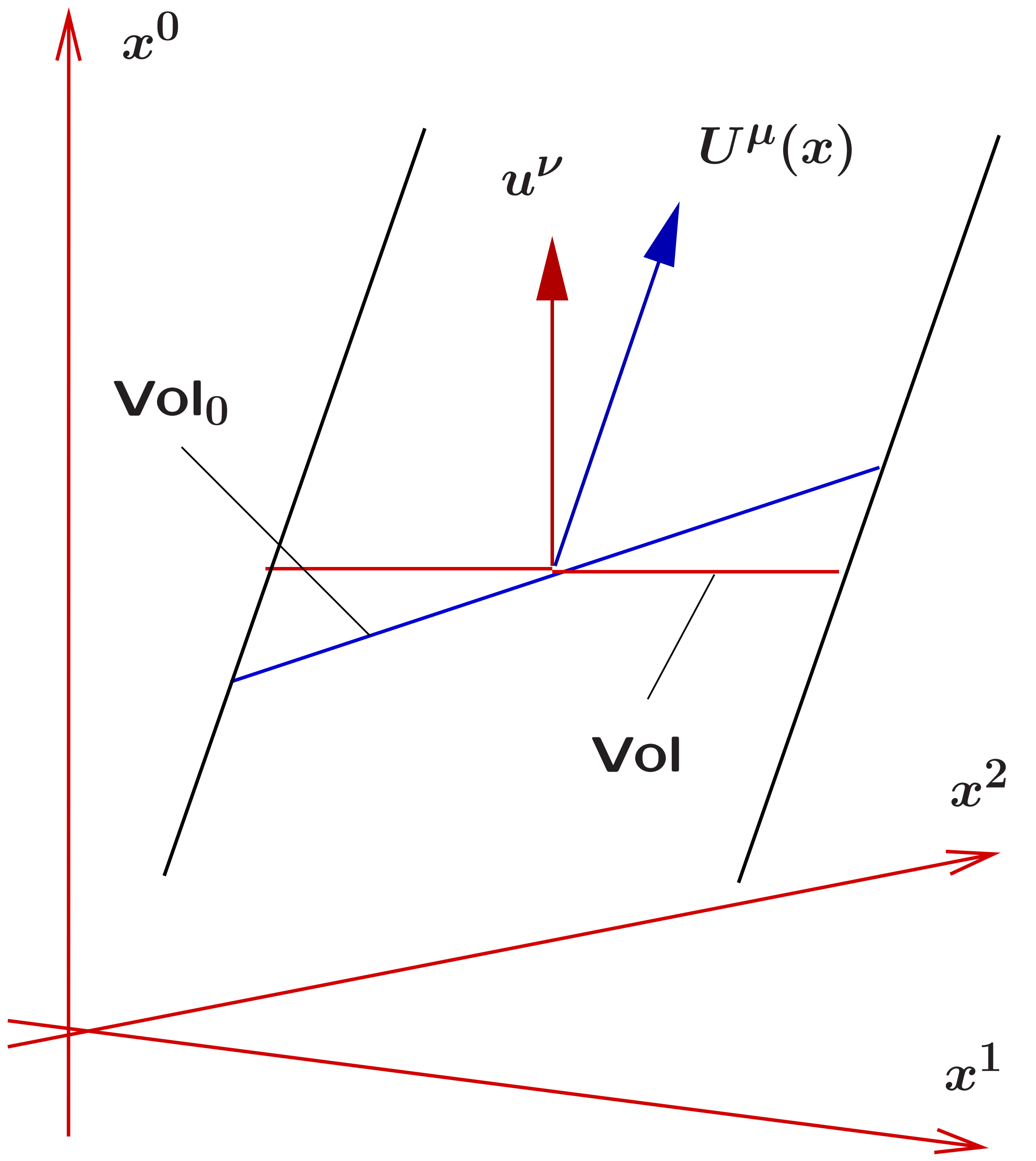
$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{V(x)^2}{c^2}}}$$

$$= -m\,U_\sigma(x)u^\sigma\,,$$

Volumen:

$$\mathrm{Vol} = \sqrt{1 - \frac{V(x)^2}{c^2}}\,\mathrm{Vol}_0$$

$$= \frac{-c^2\,\mathrm{Vol}_0}{U_\lambda(x)u^\lambda}\,,$$



Energiedichte

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{\mathrm{Vol}} = \frac{m\,c^2}{\mathrm{Vol}_0\left(1 - \frac{V(x)^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{m\,U_\sigma(x)u^\sigma U_\lambda(x)u^\lambda}{\mathrm{Vol}_0\,c^2} = \frac{\mu(x)}{c^2}U_\sigma(x)U_\lambda(x)u^\sigma u^\lambda$$

mit Ruhmassendichte $\mu(x) = \dfrac{m}{\mathrm{Vol}_0}$

Energiedichte ist quadratische Form in der Vierergeschwindigkeit

$$\varepsilon(x) = T_{\sigma\lambda}(x)\,\frac{u^\sigma}{c}\,\frac{u^\lambda}{c}$$

mit Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\sigma\lambda}(x) = \mu(x)\,U_\sigma(x)\,U_\lambda(x)$$

Energie-Impuls-Tensor für ideale Flüssigkeit:

$$T_{\rho\sigma}(x) = \left(\mu(x) + \frac{p(x)}{c^2} \right) U_\rho(x) U_\sigma(x) + p(x)\, \eta_{\rho\sigma}$$

$U_\rho(x)$: Vierergeschwindigkeit

$\mu(x)$: Ruhmassendichte

$p(x)$: Druck

Energie-Impuls-Tensor für elektromagnetisches Feld, Klein-Gordon-Feld, Dirac-Feld ...

$T_{\sigma\rho}(x)$ ist symmetrisch.

$S^\sigma(x) = -T^{\sigma\rho}(x)u_\rho$ definiert die Energiestromdichte bzgl. u^ν.

Im abgeschlossenene System: Energieerhaltung

$$0 = \partial_\rho S^\rho(x) = \partial_\rho\big(T^{\rho\sigma}(x)u_\sigma\big) = u_\sigma\,\partial_\rho T^{\rho\sigma}(x) \ .$$

in jedem Inertialsystem, also

$$\partial_\rho T^{\rho\sigma}(x) = 0 \ .$$

In gekrümmter Raumzeit:

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma}(x) = 0 \ .$$

Newton	**Einstein**
$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \vec{\nabla}\phi = 0$$	$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma = 0\,,$$
$$\frac{1}{4\pi G}\Delta\phi = \mu$$	???

ϕ **(Gravitationspotential)** $\longmapsto$ $g_{\mu\nu}$ **(Raumzeitmetrik)**

μ **(Massendichte)** $\longmapsto$ $T_{\mu\nu}$ **(Energie-Impuls-Tensor)**

$\frac{1}{4\pi G}\Delta$ $\longmapsto$ $\mathcal{D}$ **(Differentialoperator)**

Newton	Einstein
$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \vec{\nabla}\phi = 0$	$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma = 0\,,$
$\frac{1}{4\pi G}\Delta\phi = \mu$	$\mathcal{D}g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$

ϕ **(Gravitationspotential)** $\longmapsto$ $g_{\mu\nu}$ **(Raumzeitmetrik)**

μ **(Massendichte)** $\longmapsto$ $T_{\mu\nu}$ **(Energie-Impuls-Tensor)**

$\frac{1}{4\pi G}\Delta$ $\longmapsto$ $\mathcal{D}$ **(Differentialoperator)**

Theorem (David Lovelock, 1972):

$$\mathcal{D} \text{ ist zweiter Ordnung und } \nabla^\mu \mathcal{D} g_{\mu\nu} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{D} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} \right)$$

$R_{\mu\nu}$: Ricci Tensor,

R : Ricci-Skalar,

κ, Λ : Konstante.

Einsteinsche Feldgleichung:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu}$$

Newtonscher Limes

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Näherung}} \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \delta^{ij} \partial_j \phi = 0 \,,$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda \, g_{\mu\nu} = \kappa \, T_{\mu\nu} \quad \xrightarrow{\text{Näherung}} \quad \Delta\phi = 4\pi \, G \, \mu \,.$$

Gravitationsfeld ist schwach

Zeitliche Änderung des Gravitationsfelds ist schwach

Teilchenbewegung ist langsam

Materiebewegung ist langsam

$$\Longrightarrow \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \,, \qquad \Lambda = 0$$

Positives Λ bewirkt abstoßende Gravitation

Λ wurde von Einstein (1917) in die Feldgleichung eingeführt, um statische kosmologische Lösungen zu erhalten

Heute:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Dunkle Energie bewirkt beschleunigte Expansion des Universums

$$\Lambda \approx 10^{-52} \mathrm{m}^{-2}$$

$T_{\mu\nu}$ enthält (kalte) Dunkle Materie

Lösungen der Einsteinschen Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Jede Metrik ist eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichung mit irgendeinem Energie-Impuls-Tensor.

Gesucht:

Lösungen für Vakuum, Staub, Ideale Flüssigkeit, Elektromagnetisches Feld, Klein-Gordon-Feld, Dirac-Feld, ...

Vakuum ($T_{\mu\nu} = 0$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 0 \qquad \Big| g^{\mu\nu}$$

$$R - 2\,R + 4\,\Lambda = 0$$

$$R = 4\,\Lambda$$

Vakuum-Feldgleichung mit kosmologischer Konstante:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda\, g_{\mu\nu}$$

“Einstein-Mannigfaltigkeit”

Vakuum ($T_{\mu\nu} = 0$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \qquad \Big| g^{\mu\nu}$$

$$R - 2R + 4\Lambda = 0$$

$$R = 4\Lambda$$

Vakuum-Feldgleichung ohne kosmologische Konstante:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Lösungen der Vakuum-Feldgleichung ohne Λ:

Schwarzschild-Lösung (1916): Außenraum eines kugelsymmetrischen Körpers (Stern, Schwarzes Loch)

Kerr-Lösung (1963): Rotierendes Schwarzes Loch

Neugebauer-Meinel-Scheibe (1994): Außenraum einer rotierenden Staubscheibe

Brinkmann-Lösungen (1925): Ebene Gravitationswellen

Beck(-Einstein-Rosen-)Lösungen (1925): Zylindrische Gravitationswellen

...

Feldgleichung für ideale Flüssigkeit:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \kappa \left\{ \left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + p\, g_{\mu\nu} \right\}$$

Euler-Gleichung:

$$\left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) U^\rho \nabla_\rho U^\sigma + \nabla_\tau p \left(g^{\tau\sigma} + \frac{1}{c^2} U^\tau U^\sigma \right) = 0 \,.$$

Zustandsgleichung: $p = f(\mu)$

Gekoppeltes System von Gleichungen für $g_{\rho\sigma}$, U^σ, μ,

Lösungen der Einsteinschen Feldgleichung mit idealer Flüssigkeit

Innere Schwarzschild-Lösung (1916): Kugelsymmetrische statische Lösung (ohne Λ) mit konstanter Massendichte, Sternmodell

Friedmann-Lösungen (1922): Kosmologische Lösungen, homogen und isotrop

Gödel-Kosmos (1949): rotierende homogene Staublösung mit Λ, Kausalitätsverletzung

...

Einsteinsche Feldgleichung kann aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden

Einstein-Hilbert-Wirkungsintegral:

$$\mathcal{W} = \int_\Omega \left(\frac{R}{2} - \kappa\, \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \right) \sqrt{|\mathrm{det}(g_{\mu\nu})|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \, .$$

D. Hilbert (1915)

Linearisierte Einsteinsche Feldgleichung:

$$\boldsymbol{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

$$\boldsymbol{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \, .}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} \, .$$

Hilbert-Eichung: $\partial^{\mu} \gamma_{\mu\nu} = 0$

$$\boldsymbol{\Box \gamma_{\mu\nu} = 2 \, \kappa \, T_{\mu\nu} \, .}$$

$$\Box = \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$T_{\mu\nu} = 0$: **Ebene harmonische Gravitationswellen**